Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Verificação de código para cálculo de derivada de funções com singularidades tipo salto[1]

Welton Costa Lavércio [2]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal - universidade Federal de Uberlândia
Homero Ghioti da Silva[3]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal - universidade Federal de Uberlândia

1 Introdução

Um teste de verificação de código que simula a derivada de uma função real com singularidade tipo salto, usando o Método das Soluções Manufaturadas, é apresentado. Método das diferenças finitas explícitas de segunda ordem de precisão foi utilizado e ajustado para manter a ordem de precisão empregada nos cálculos dos pontos vizinhos da singularidade. Funções com singularidade tipo salto podem representar bem fronteiras imersas em escoamentos bi ou tridimensionais [1]. A presente proposta é uma alternativa para uso do Método da Fronteira Imersa (MFI). Enquanto que MFI apresenta ordem de precisão afetada pelo uso de polinômio interpolador entre pontos de malhas Lagrangeana e Euleriana em geometrias complexas, a presente proposta de cálculo garante a ordem de precisão para os pontos vizinhos da fronteira, além de se usar apenas uma única malha regular, fato que simplifica e muito o modelo numérico. Este também permite o emprego de diferenças finitas de alta ordem de precisão melhorando a resolução significantemente e reduzindo custo computacional. Os resultados apontaram a ordem de precisão teórica empregada e confirmaram a inexistência de erros de programação da implementação.

2 Desenvolvimento

O cálculo da derivada, baseado em [1], foi realizado conforme segue. A partir de uma função $f(x)$ com uma descontinuidade no ponto $x = x_\alpha$, escrevemos a série de Taylor no ponto x_i e analisamos $f(x)$ no ponto x_{i+1}. Assumindo $f(x)$ analítica em todo seu domínio $D = \{x|\ x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}\}$, exceto no ponto x_α onde se encontra a descontinuidade no valor da função ou de suas derivadas têm-se: se $x_i < x_\alpha$, a série de Taylor não pode assumir

[1]Agradecimentos: FAPEMIG, UFU e MEC pelo financiamento do trabalho.
[2]weltoncosta051@gmail.com
[3]homero@ufu.br

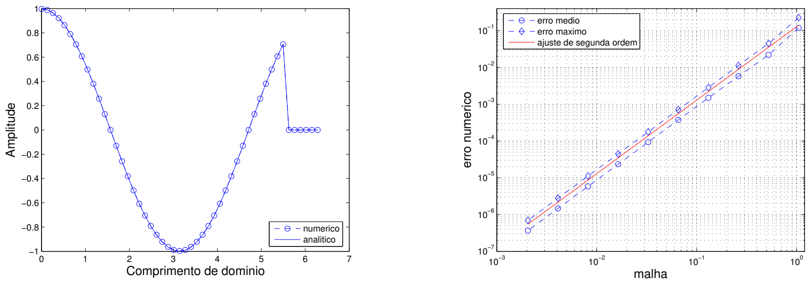

Figura 1: Esquerda - Comparacão das soluções numérica e analítica usando uma discretização de 49 pontos. Direita - Teste de verificação de malhas indicando segunda ordem de precisão no decaimento do erro numérico.

valor de f em x_α para prever corretamente $f(x_{i+1})$, desta forma, um termo corretor Y_α deve ser adicionado, obtendo

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} + \cdots + Y_\alpha.$$

Aqui $Y_\alpha = [f]_\alpha + [f']_\alpha h^+ + \frac{1}{2}[f'']_\alpha (h^+)^2 + \cdots$, onde $h = x_{i+1} - x_i$ e $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$. Os termos: $[f]_\alpha$ (representando o salto no valor de f em $x = x_\alpha$), $[f']_\alpha$ e $[f'']_\alpha$ foram calculados via polinômio de Taylor usando os pontos laterais da discretização da função f, escolhidos conforme a necessidade. Com isso:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h} - Y_\alpha. \tag{1}$$

Para os demais pontos da discretização, a equação (1) foi utilizada sem a correção citada acima.

3 Resultados preliminares e considerações finais

Derivada numérica da função seno no domínio de 0 a 2π assumindo uma descontinuidade no ponto $x_\alpha = 5.5$ é apresentado. Um teste de refinamento de malhas foi realizado usando 7; 13; 25; 49; 97; 193; 385; 769; 1537 e 3073 pontos na discretização. A figura apresenta comparações das soluções analítica e numerica usando a malha computacional com 49 pontos e o teste de refinamento de malhas. Note a convergência de segunda ordem de precisão para ambos os cálculos de erros médio e máximo. Pretende-se implementar, para apresentação no evento, os cálculos usando método de diferença finita compacta de sexta ordem de precisão.

Referências

[1] N. M. Linnick, H. F. Fasel. *A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains*. Journal of Computational Physics, 204: 157-192, 2005.

