

Uma solução particular baseada em funções de Green para formulações nodais derivadas da equação de transporte bidimensional

Anderson Tres, **Camila B. Picoloto,**

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS,

Av. Bento Gonçalves 9500 - 91509-900, Porto Alegre, RS,

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS,

Rua Sarmento Leite, 425 - 90050-170, Porto Alegre, RS

E-mail: andersontres.mat@gmail.com, camila_becker_87@hotmail.com,

Liliane B. Barichello **Rudnei D. da Cunha,**

Instituto de Matemática, UFRGS,

Av. Bento Gonçalves 9500 - 91509-900, Porto Alegre, RS

E-mail: lbaric@mat.ufrgs.br, rcunha@mat.ufrgs.br.

Resumo: Neste trabalho, investiga-se um problema de transporte de partículas definido em um domínio retangular com uma fonte de nêutrons isotrópica, cercado por condições de contorno de vácuo em geometria cartesiana bidimensional. A abordagem proposta, já utilizada anteriormente, reduz a complexidade do modelo bidimensional através de esquemas nodais, juntamente com a aplicação do método de ordenadas discretas analítico (ADO). O esquema nodal é definido em todo o domínio do problema e como usualmente em métodos nodais, relações entre os fluxos médios e os fluxos desconhecidos nos contornos, são introduzidos. O método ADO é usado para desenvolver soluções para as equações integradas unidimensionais, que são explícitas em termos das variáveis espaciais. A técnica utilizada conduz a uma redução da ordem dos sistemas de autovalores associados, proporcionando desse modo, soluções de forma mais eficientes no ponto de vista computacional. Para o caso teste aqui analisado, diferentemente de trabalhos anteriores, soluções particulares mais gerais são utilizadas baseadas em funções de Green.

Palavras-chave: Método de ordenadas discretas analítico, equação de transporte bidimensional, funções de Green

1 Introdução

A solução de problemas de transporte de nêutrons multidimensionais tem sido um tópico de pesquisa de grande interesse, devido ao amplo campo de aplicações [1,12]. Neste contexto, daremos atenção aos métodos nodais [2,3,7], já que estes são comumente utilizados na resolução de problemas multidimensionais onde, através da integração em uma das variáveis espaciais, reduz-se o sistema de EDP's (originados da discretização da integral angular) em sistemas de EDO's. O uso de esquemas nodais reduz a complexidade do modelo e possibilita a utilização de vários instrumentos de análise espacial [5,6,8,11].

O método ADO [4] tem sido intensivamente utilizado com sucesso para encontrar a solução das equações nodais em ordenadas discretas, derivadas do problema de transporte de nêutrons bidimensional, de uma maneira concisa e exata, a baixo custo computacional [5,6,10]. O problema teste apresentado aqui é diferente daquele tratado em [5,6]. O mesmo foi abordado, no entanto, na referência [10], sendo que aqui, a solução particular é derivada através das funções de Green, que se torna mais geral que o caso tratado em [10], baseado na proposição de soluções

particulares constantes. Desta maneira, busca-se estender a investigação que vem sendo feita com o método ADO na solução de problemas bidimensionais [5,6,10], objetivando abordar uma variedade de problemas testes, no sentido de obter uma análise ampla do desempenho da formulação proposta e validar os resultados numéricos obtidos a partir de formulações teóricas diferenciadas.

Na próxima seção, a equação de transporte de nêutrons bidimensional em ordenadas discretas é aplicada a um problema de fonte fixa em meios não-multiplicativos. A equação é integrada na variável y de modo a fornecer um sistema de EDO's, onde os termos desconhecidos que aparecem nos contornos são aproximados, de maneira que o problema unidimensional na variável x fique independente da variável y . Na seção 3 o Método ADO é aplicado ao problema unidimensional na variável x onde, foi possível reduzir à metade, a ordem do problema de autovalores. As soluções do problema homogêneo são então definidas. Na seção 3.1, a solução particular via funções de Green é proposta. As considerações finais deste trabalho estão na seção 4.

2 Formulação do Problema

Considera-se o problema de transporte definido numa região retangular R , com $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$ centrado na origem de um sistema cartesiano. Na região definida em $[0, a_s] \times [0, b_s]$ dentro de R , existe uma fonte isotrópica de nêutrons, de acordo com Loyalka e Tsai [9].

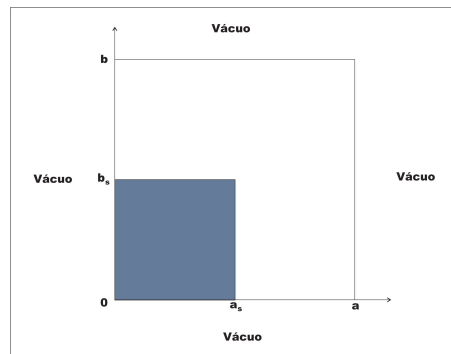


Figura 1: Domínio R.

Considerando a equação para o fluxo angular de nêutrons, em meio não-multiplicativo, homogêneo, com fonte isotrópica fixa, escrita em ordenadas discretas

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, \Omega_m) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, \Omega_m) + \sigma_t \Psi(x, y, \Omega_m) = Q(x, y) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^M w_k \Psi(x, y, \Omega_k) \quad (1)$$

para $m = 1, \dots, M$ com $M = N(N + 2)/2$, onde w_m são os pesos associados as direções $\Omega_m = (\mu_m, \eta_m)$, σ_t e σ_s são as seções de choque total e de espalhamento, respectivamente, e $Q(x, y)$ é o termo fonte de nêutrons.

Objetivando analisar a equação para a direção x , optou-se por ordenar o conjunto de direções (ω_m, Ω_m) definidas por $\mu_m > 0$ aos índices $m = 1, \dots, M/2$ e $\mu_m < 0$ aos índices $m = M/2 + 1, \dots, M$. Desta forma, integrando a eq. (1) em todo y , obtemos as equações nodais unidimensionais na variável x como

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_m) + \frac{\eta_m}{b} [\Psi(x, b, \Omega_m) - \Psi(x, 0, \Omega_m)] + \sigma_t \Psi_y(x, \Omega_m) = Q_y(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^{M/2} w_k [\Psi_y(x, \Omega_k) + \Psi_y(x, \Omega_{k+M/2})] \quad (2)$$

e

$$\begin{aligned}
 & -\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_{m+M/2}) + \frac{\eta_{m+M/2}}{b} [\Psi(x, b, \Omega_{m+M/2}) - \Psi(x, 0, \Omega_{m+M/2})] + \\
 & \sigma_t \Psi_y(x, \Omega_{m+M/2}) = Q_y(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^{M/2} w_k [\Psi_y(x, \Omega_k) + \Psi_y(x, \Omega_{k+M/2})] \quad (3)
 \end{aligned}$$

para $m = 1, \dots, M/2$, onde os momentos do fluxo angular são definidos como

$$\Psi_y(x, \Omega_m) = \frac{1}{b} \int_0^b \Psi(x, y, \Omega_m) dy \quad (4)$$

e a fonte

$$Q_y(x) = \frac{1}{b} \int_0^b Q(x, y) dy. \quad (5)$$

Analisando as condições de contorno do problema, verifica-se que os fluxos nas direções de incidência são nulos em $y = b$ e $y = 0$, ou seja:

$$\Psi(x, b, \Omega_m) = 0 \quad m = M/4 + 1, \dots, M/2 \quad \text{e} \quad m = 3M/4 + 1, \dots, M \quad (6)$$

e

$$\Psi(x, 0, \Omega_m) = 0 \quad m = 1, \dots, M/4 \quad \text{e} \quad m = M/2 + 1, \dots, 3M/4. \quad (7)$$

Por sua vez, os fluxos emergentes nas fronteiras são desconhecidos. Estes fluxos serão, então, aproximados da forma

$$\Psi(x, b, \Omega_m) \approx \hat{k}_2 \Psi_y(x, \Omega_m) \quad m = 1, \dots, M/4 \quad \text{e} \quad m = M/2 + 1, \dots, 3M/4, \quad (8)$$

e

$$\Psi(x, 0, \Omega_m) \approx \hat{k}_1 \Psi_y(x, \Omega_m) \quad m = M/4 + 1, \dots, M/2 \quad \text{e} \quad m = 3M/4 + 1, \dots, M \quad (9)$$

afim de obter condições auxiliares para resolver o sistema de equações. Neste ponto, considera-se as constantes \hat{k}_1 e \hat{k}_2 arbitrárias.

Substituindo-se as eqs. (6) e (7) e as aproximações definidas nas eqs. (8) e (9) nas eqs. (2) e (3), obtém-se o seguinte conjunto de equações unidimensionais na direção x

$$\begin{aligned}
 \mu_m \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_m) + [\sigma_t + k_2 \eta_m] \Psi_y(x, \Omega_m) = \\
 Q_y(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^{M/2} w_k [\Psi_y(x, \Omega_k) + \Psi_y(x, \Omega_{k+M/2})], \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{m+M/4} \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_{m+M/4}) + [\sigma_t - k_1 \eta_{m+M/4}] \Psi_y(x, \Omega_{m+M/4}) = \\
 Q_y(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^{M/2} w_k [\Psi_y(x, \Omega_k) + \Psi_y(x, \Omega_{k+M/2})], \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_{m+M/2}) + [\sigma_t + k_2 \eta_{m+M/2}] \Psi_y(x, \Omega_{m+M/2}) = \\
 Q_y(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^{M/2} w_k [\Psi_y(x, \Omega_k) + \Psi_y(x, \Omega_{k+M/2})], \quad (12)
 \end{aligned}$$

e

$$-\mu_{m+M/4} \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_{m+3M/4}) + [\sigma_t - k_1 \eta_{m+3M/4}] \Psi_y(x, \Omega_{m+3M/4}) = Q_y(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^{M/2} w_k [\Psi_y(x, \Omega_k) + \Psi_y(x, \Omega_{k+M/2})], \quad (13)$$

para $m = 1, \dots, M/4$ e $k_1 = \widehat{k}_1/b$ e $k_2 = \widehat{k}_2/b$.

Verifica-se que, utilizando esta abordagem, os termos derivados dos fluxos desconhecidos na fronteira não são introduzidos como modificações no termo fonte do problema original, permanecendo o problema derivado da direção x desacoplado da direção y .

3 Solução em ordenadas discretas

A partir da equação de transporte bidimensional, conseguiu-se gerar um sistema de equações unidimensionais (10)-(13), possibilitando o uso do método ADO para sua resolução. As soluções homogêneas obtidas através deste método, são construídas em termos de autovalores e de autofunções. São propostas, então, soluções da forma

$$\Psi_y(x, \Omega_m) = \Phi(\nu, \Omega_m) e^{-x/\nu}. \quad (14)$$

De acordo com o trabalho anterior [10], é obtido via o método ADO, o seguinte problema de autovalores escrito na forma matricial $[\mathbf{D} - \mathbf{A}]\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}$, onde \mathbf{D} e \mathbf{A} são matrizes $M/2 \times M/2$ e com $\lambda = 1/\nu^2$. Aqui, a matriz \mathbf{D} é definida como

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left\{ \left(\frac{\sigma_t + k_2 \eta_1}{\mu_1} \right)^2, \dots, \left(\frac{\sigma_t + k_2 \eta_{M/4}}{\mu_{M/4}} \right)^2, \right. \\ \left. \left(\frac{\sigma_t - k_1 \eta_{M/4+1}}{\mu_{M/4+1}} \right)^2, \dots, \left(\frac{\sigma_t - k_1 \eta_{M/2}}{\mu_{M/2}} \right)^2 \right\} \quad (15)$$

e os elementos de \mathbf{A} são representados, para $j = 1, \dots, M/2$, como

$$\mathbf{A}(i, j) = \begin{cases} \frac{w_j \sigma_s [\sigma_t + k_2 \eta_i]}{2\mu_i^2}, & \text{para } i = 1, \dots, M/4, \\ \frac{w_j \sigma_s [\sigma_t - k_1 \eta_i]}{2\mu_i^2}, & \text{para } i = M/4 + 1, \dots, M/2, \end{cases} \quad (16)$$

para $i = 1, \dots, M/2$. Resolvido o problema de autovalores $\{\lambda_j, \mathbf{U}_j\}$ e determinadas as constantes de separação ν_j , definem-se as funções \mathbf{V} de acordo com a referencia [10], e determina-se as autofunções que podem ser escritas, para $m = 1, \dots, M/2$, na forma

$$\Phi(\nu_j, \Omega_m) = \frac{U(\nu, \Omega_m) + V(\nu, \Omega_m)}{2} \quad (17)$$

e

$$\Phi(\nu_j, \Omega_{m+M/2}) = \frac{U(\nu, \Omega_m) - V(\nu, \Omega_m)}{2}. \quad (18)$$

Como as constantes de separação aparecem aos pares $\pm\nu_j$, podemos escrever a solução do problema homogêneo da eq. (2) e (3), para $m = 1, \dots, M/2$ na forma geral

$$\Psi_y^h(x, \Omega_m) = \sum_{j=1}^{M/2} A_j \Phi(\nu_j, \Omega_m) e^{-x/\nu_j} + B_j \Phi(\nu_j, \Omega_{m+M/2}) e^{-(a-x)/\nu_j} \quad (19)$$

e

$$\Psi_y^h(x, \Omega_{m+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} A_j \Phi(\nu_j, \Omega_{m+M/2}) e^{-x/\nu_j} + B_j \Phi(\nu_j, \Omega_m) e^{-(a-x)/\nu_j}, \quad (20)$$

onde os coeficientes A_j e B_j devem ser determinados.

3.1 Solução Particular

Para escrever a solução geral da eqs. (2) e (3) seguiu-se o trabalho anterior [5], que faz uso das funções de Green e as soluções elementares do problema para construir a solução particular. Desta forma, a solução é proposta como

$$\Psi_y^p(x, \Omega_m) = \sum_{j=1}^{M/2} C_j(x)\Phi(\nu_j, \Omega_m) + D_j(x)\Phi(\nu_j, \Omega_{m+M/2}) \quad (21)$$

e

$$\Psi_y^p(x, \Omega_{m+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} C_j(x)\Phi(\nu_j, \Omega_{m+M/2}) + D_j(x)\Phi(\nu_j, \Omega_m), \quad (22)$$

onde para o caso teste deste trabalho, diferentemente de [5], deriva-se explicitamente as seguintes expressões para $C_j(x)$ e $D_j(x)$,

$$C_j(x) = \frac{1}{N(\nu_j)} \sum_{\alpha=1}^{M/2} \nu_j \omega_\alpha \frac{b_s}{b} \left[[\Phi(\nu_j, \Omega_\alpha) + \Phi(\nu_j, \Omega_{\alpha+M/2})](1 - e^{-x/\nu_j}) \right] \quad (23)$$

e

$$D_j(x) = \frac{1}{N(\nu_j)} \sum_{\alpha=1}^{M/2} \nu_j \omega_\alpha \frac{b_s}{b} \left[[\Phi(\nu_j, \Omega_{\alpha+M/2}) + \Phi(\nu_j, \Omega_\alpha)](1 - e^{-(a_s-x)/\nu_j}) \right], \quad (24)$$

para $x \in [0, a_s]$, ainda,

$$C_j(x) = \frac{1}{N(\nu_j)} \sum_{\alpha=1}^{M/2} \nu_j \omega_\alpha \frac{b_s}{b} \left[[\Phi(\nu_j, \Omega_\alpha) + \Phi(\nu_j, \Omega_{\alpha+M/2})](e^{-(x-a_s)/\nu_j} - e^{-x/\nu_j}) \right] \quad (25)$$

e

$$D_j(x) = 0, \quad (26)$$

para $a_s < x \leq a$, onde

$$N(\nu_j) = \sum_{k=1}^{M/2} \omega_k \mu_k \left[\Phi^2(\nu_j, \Omega_k) - \Phi^2(\nu_j, \Omega_{k+M/2}) \right]. \quad (27)$$

Objetivando validar os resultados numéricos obtidos em [10], considerou-se aqui, $Q(x, \Omega_\alpha) = 1$, para $x \in [0, a_s]$. Definidas as soluções homogênea e particular para as eqs. (10)-(13) pode-se, agora, determinar as constantes A_j e B_j . Considerando a versão integrada das condições de contorno do problema

$$\Psi_y(0, \Omega_m) = 0, \quad m = 1, \dots, M/2 \quad (28)$$

e

$$\Psi_y(a, \Omega_m) = 0, \quad m = M/2 + 1, \dots, M, \quad (29)$$

e substituindo-as nas eqs. (19)-(22), obtém-se o seguinte sistema linear para $m = 1, \dots, M/2$

$$\sum_{k=1}^{M/2} A_k \Phi(\nu_k, \Omega_m) + B_k \Phi(\nu_k, \Omega_{m+M/2}) e^{-a/\nu_k} = -\Psi_y^p(0, \Omega_m) \quad (30)$$

e

$$\sum_{k=1}^{M/2} A_k \Phi(\nu_k, \Omega_{m+M/2}) e^{-a/\nu_k} + B_k \Phi(\nu_k, \Omega_m) = -\Psi_y^p(a, \Omega_{m+M/2}). \quad (31)$$

A resolução deste sistema linear $M \times M$ torna a solução completamente estabelecida e pode-se, então, escrever a solução geral para o problema, como a soma da solução homogênea com a solução particular.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, buscando-se validar as soluções explícitas que vem sendo desenvolvidas para problemas bidimensionais de transporte através do método ADO conjuntamente com esquemas nodais, o caso teste tratado na referência [10] foi novamente abordado a partir de soluções diferenciadas no que diz respeito a solução particular do problema. Os resultados numéricos foram verificados em todos os dígitos, não sendo por isso aqui repetidos. A solução particular baseada no uso de funções de Green se torna mais abrangente, podendo incluir termos de fonte não constantes, e aqui, adicionalmente ao caso abordado na referência [5] foi mais uma vez verificada com sucesso.

Referências

- [1] A.K. Al-Basheer, G.E. Sjoden, M. Ghita, Critical discretization issues in 3-D S_N simulations relevant to dosimetry and medical physics, *Nuclear Technology*, 169 (2010) 252-262.
- [2] Y.Y. Azmy, Comparison of three approximations to the linear-linear nodal transport method in weighted diamond difference form, *Nuclear Science and Engineering*, 100 (1988) 190-200.
- [3] A. Badruzzaman, An efficient algorithm for nodal-transport solutions in multidimensional geometry, *Nuclear Science and Engineering*, 89 (1985) 281-290.
- [4] L.B. Barichello, C.E. Siewert, A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62 (1999) 665-675.
- [5] L.B. Barichello, L.C. Cabrera, J.F.P. Filho, An analytical discrete ordinates solution for two dimensional problems based on nodal schemes, "In Proceedings of the International Nuclear Atlantic Conference - INAC2009", Rio de Janeiro, Brazil, 2009.
- [6] L.B. Barichello, L.C. Cabrera, J.F.P. Filho, An analytical approach for a nodal scheme of two-dimensional neutron transport problems, *Annals of Nuclear Energy*, 38 (2011) 1310-1317.
- [7] J.I. Duo, Y.Y. Azmy, L.T. Zikatanov, A posteriori error estimator and AMR for discrete ordinates nodal transport methods, *Annals of Nuclear Energy*, 36 (2009) 268-273.
- [8] R.R. Gomes, R.C. Barros, Computational modeling of monoenergetic neutral particle inverse transport problems in slab geometry, *American Institute of Physics*, 1479 (2012) 2225-2228.
- [9] S.K. Loyalka, R.W. Tsai, A numerical method for solving the integral equation of neutron transport: II, *Nuclear Science and Engineering*, 58 (1975) 193-202.
- [10] A. Tres, C. Becker, R.D. Cunha, L.B. Barichello, A deterministic approach for neutron transport in two-dimensional domains, "In Proceedings of the International Congress of Mechanical Engineering - COBEM", Ribeirão Preto, Brazil, 2013, aceito para publicação.
- [11] M.M.R. Williams, Radiation transport in a light duct using a one-dimensional model, *Physica Scripta*, 76 (2007) 303-313.
- [12] M.M.R. Williams, Exact solutions of the two-dimensional cell problem, *Nuclear Science and Engineering*, 173 (2012) 33-51.