Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Relação entre singularidades fracionárias e comportamento assintótico dos coeficientes de Fourier

Arianne Vellasco-Gomes[1]
Universidade Federal de Roraima, Escola Agrotécnica.
Alexys Bruno-Alfonso[2]
Universidade Estadual Paulista, Departamento de Matemática.
Rubens de Figueiredo Camargo[3]
Universidade Estadual Paulista, Departamento de Matemática.

1 Introdução

Em meados do século XIX, Jean B. J. Fourier (1768 - 1830), ao analisar a propagação do calor afirmou, na publicação "*Mémoire sur la théorie de la chaleur*", que é possível representar funções por séries de senos e cossenos, cujas frequências são múltiplos de uma frequência fundamental. O assunto chamou a atenção de outros estudiosos como Johann P. G. L. Dirichlet (1805-1859) e Georg F. B. Riemann (1826-1866). Estes contribuíram como maior rigor, ao perceberem seu vasto leque de aplicabilidade.

Em algumas situações a forma complexa da série de Fourier é mais conveniente. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de período L, ela pode ser representada por uma série de Fourier de exponenciais de período L. Isto é [1, 2],

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n \, e^{2n\pi i x/L}. \tag{1}$$

Aqui F_n é o n-ésimo coeficiente da série de Fourier de $f(x)$, e é dado pela fórmula

$$F_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-2n\pi i x/L}\, dx. \tag{2}$$

Como condição necessária para a convergência de cada série de Fourier, temos $F_n \to 0$ quando $n \to \pm\infty$. Se $f(x)$ tem derivadas contínuas em todas as ordens, o decaimento de $|F_n|$ é exponencial. Em outros casos, quanto mais suave a função, mais rápido é o decaimento dos coeficientes. O presente trabalho trata do comportamento assintótico dos coeficientes de Fourier para o caso de funções que apresentam singularidades fracionárias.

[1]arianne.vellasco@ufrr.br
[2]alexys.bruno-alfonso@unesp.br
[3]rubens.camargo@unesp.br

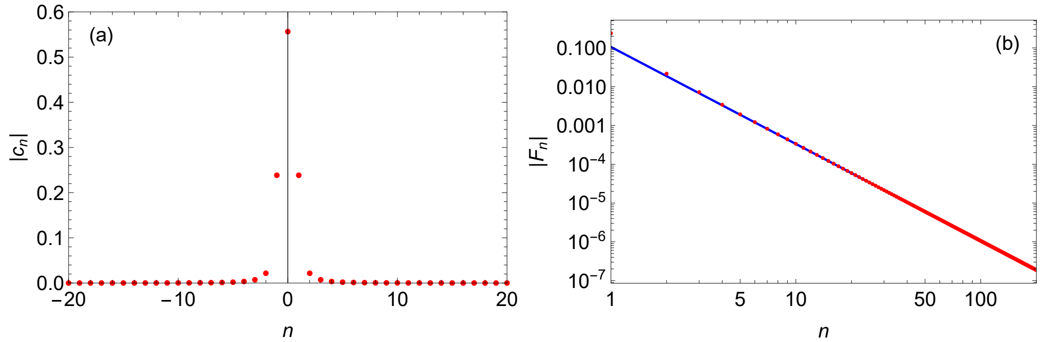

Figura 1: (a) Coeficientes de Fourier de $f(x) = |\mathrm{sen}\,(\pi\, x)|^{3/2}$, com $-20 \leq n \leq 20$. (b) Gráfico log-log dos coeficientes de Fourier da mesma função, com $1 \leq n \leq 200$. A linha corresponde ao ajuste com $100 \leq n \leq 200$.

Especificamente, serão analisadas funções com período 1 da forma $f(x) = |\mathrm{sen}\,(\pi\, x)|^{\alpha}$, como $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, quando α não é um inteiro par, a singularidade é da forma $f(x) \approx |\pi(x-m)|^{\alpha}$ para $x \approx m \in \mathbb{Z}$.

2 Resultados

Na Figura 1(a) se observa que, para $\alpha = 3/2$, $|F_n|$ é par e decai quando $n \to \pm\infty$. A Figura 1(b) mostra os resultados, em escala log-log, para $n \geq 1$. Quando $n \gg 1$, observamos que $\log_{10}|F_n| \approx \log_{10}(A) - \beta\, \log_{10}(n)$, ou seja,

$$|F_n| \approx A\, n^{-\beta}. \tag{3}$$

O ajuste linear com $100 \leq n \leq 200$ produz $\beta \approx 2.50007$.

Mediante testes numéricos para diversos valores de α suspeitamos que $\beta = \alpha + 1$. Esta conjectura pode ser demonstrada mediante a extensão $x \in \mathbb{C}$ e integração num contorno apropriado [4].

Referências

[1] R. Bhatia. *Fourier Series.* The Mathematical Association of America, Washington, 2005.

[2] J. W. Brown and R. V. Churchill. *Fourier series and boundary value problems, 7a ed.*. Mc Graw Hill, Boston, 2008.

[3] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis - an introduction*, Princeton Universoty Press, Princeton, 2003

[4] A. Vellasco-Gomes, Estrutura eletrônica de cristais: Generalização mediante o Cálculo Fracionário, Tese de Doutorado em Ciência e Tecnologia de Materiais, Unesp, 2018