Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Dinâmica geral de crescimento da população feminina da cidade de Eunápolis através da matriz de Leslie[1]

Luiz Victor Lima Macêdo [2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Igor Breda Ferraço [3]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

## 1 Introdução

O fenômeno de crescimento populacional é importante em diversas áreas da ciência aplicada. A Matemática, neste sentido, contribui com a elaboração de modelos que permitam analisá-lo quantitativamente em função do tempo. Neste trabalho, apresentamos os resultados finais de um estudo realizado sobre o crescimento (ou decrescimento) populacional feminino da cidade de Eunápolis, Bahia, utilizando o modelo matricial de Leslie.

## 2 Modelo matricial de Leslie

Suponha que seja $I$ a idade máxima atingida pelas fêmeas de uma determinda população. Ao dividirmos a população em $n$ faixas etárias, a duração de cada faixa é $\frac{I}{n}$.

O modelo matricial de Leslie consiste na seguinte equação matricial

$$x^{(k)} = L \cdot x^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, ... \tag{1}$$

em que

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, x^{(k-1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

sendo $L$ a matriz de Leslie, $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ os vetores de distribuição etária nos tempos $t_k$ e $t_{k-1}$, nos quais $x_i^{(k)}$ e $x_i^{(k-1)}$ são o número de fêmeas em cada uma das faixas etárias. Os

---

[1] versão 1.2.

[2] victor.mat.ifba@gmail.com

[3] igor.ferraco@ifba.edu.br

 

termos $a_i$ e $b_i$ da matriz $L$ são, respectivamente, os parâmetros de natalidade e mortalidade da população. Por definição, $a_i \geq 0$ e $0 < b_i \leq 1$. Para estimar a população em tempos posteriores, os tempos de observação sucessivos são iguais a duração da faixa etária. Assim, as fêmeas na $(i+1)$-*ésima* faixa etária no instante $t_{k+1}$ estavam na $i$-*ésima* faixa etária no instante $t_k$.

Em [3], estimamos a população feminina da cidade de Eunápolis, Bahia, em 2018, utilizando (1) com faixa etária igual a 10 anos. Apesar de (1) realizar estimativas, a dinâmica geral de crescimento é determinada pelos autovalores e autovetores da matriz de Leslie, conforme [1], [2] e [4]. Para $k \to +\infty$, a distribuição etária da população satisfaz a seguinte equação

$$x^{(k)} = \lambda_1 \cdot x^{(k-1)} \tag{2}$$

onde $\lambda_1$ é um autovalor dominante de $L$ com autovetor $x_1$ correspondente dado por

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1}{\lambda_1} & \frac{b_1 \cdot b_2}{\lambda_1^2} & \cdots & \frac{b_1 \cdots b_n}{\lambda_1^n} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

De (2), observamos que para valores grandes de $k$ a proporção de fêmeas nas faixas torna-se constante. Esta proporção, conforme [1], [2] e [4], é determinada por $x_1$.

Calculando $\lambda_1$ e $x_1$ da matriz $L$ associada (veja [2]), obtemos:

$$\lambda_1 = 0.996, \tag{4}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.995 & 0.997 & 0.999 & 1.002 & 0.983 & 0.981 & 0.956 & 0.881 & 0.7586 \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

Portanto, com os valores obtidos para $\lambda_1$ e $x_1$, podemos concluir que: a cada 10 anos, a população terá 99,6% da população total anterior e para cada 1000 mulheres na primeira faixa etária, existem 995 na segunda, 997 na terceira e assim sucessivamente.

## Referências

[1] K. V. P. Barco, Modelo matricial de Leslie: conceitos algébricos no estudo do crescimento populacional por faixa etária, Monografia de Especialização, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.

[2] A. Howard e C. Rorres. *Álgebra Linear e Aplicações, 10a. edição*. Bookman, Porto Alegre, 2012.

[3] L. V. L. Macedo e I. B. Ferraço. Utilização da matriz de Leslie para estudar o crescimento populacional feminino da cidade de Eunápolis, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 14:110-121, 2019. DOI: 10.21167/cqdvol14ermac201923169664lvlmibf110121.

[4] D. Mesquista. Matrizes de Leslie e valores próprios dominantes, *Revista Matemática Universitária*, 50: 67-71, 2011.