Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado pela Fatoração ILU(0)

Joseana Veiga de Souza Frango[1]
Thiago Jordem Pereira[2]
Departamento de Ciências Exatas e da Terra, INFES, UFF, Santo Antônio de Pádua, RJ

O problema de condução em objetos sólidos pode ser modelado por uma equação diferencial parcial, sujeita a certas condições de contorno e inicial. Ao discretizar esta equação pelo método de Diferenças Finitas Regressivas (DFR), obtém-se um sistema de equações algébricas lineares [1]. O emprego de métodos numéricos eficientes, como o Gradiente Conjugado (GC), facilita na busca de uma aproximação à solução deste sistema linear resultante [1,2]. Porém, a eficiência do método dos Gradientes Conjugados pode ser comprometida em alguns casos [1,2]. Dessa forma, pode-se utilizar pré-condicionadores ao método GC, nos quais destaca-se a Fatoração Incompleta LU com preenchimento zero - ILU(0) [3]. Assim, o objetivo deste trabalho é estudar a eficiência do método GC mediante o uso do Pré-condicionador ILU(0), GCPC-ILU(0), onde analisa-se o erro de arredondamento e o número de iterações necessárias para a convergência do método.

Utiliza-se como motivação inicial o problema de condução de calor unidimensional em uma barra de metal de comprimento L, que é modelado pela equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t, \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ representa a temperatura na posição x da barra no instante t e α é a constante relacionada as propriedades de condução de calor do material. Para que a solução do problema (1) possa ser obtida, é necessário estabelecer condições de contorno e inicial [1,2]. Ao discretizar a Eq. (1) pelo método DFR [1], gera-se um sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j-1)}, \quad \text{com} \quad j = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

onde $\mathbf{A}$ é um matriz esparsa, tridiagonal, simétrica e positiva definida; os vetores $\mathbf{u}^{(j)}$ e $\mathbf{u}^{(j-1)}$ envolve as incógnitas e os termos independentes do sistema linear, respectivamente.

Como a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ do sistema linear (2) é simétrica ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) e positiva definida ($\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$), pode-se resolver tal sistemas aplicando o método dos Gradientes Conjugados [1,2,4]. Em alguns casos, pode-se melhorar a eficiência do método dos Gradientes Conjugados em termos de eficiência à solução do sistema linear, utilizando-se um pré-condicionamento de modo que [2]

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{(j-1)}, \tag{3}$$

[1]joseanafrango@iduff.com.br
[2]tjordem@gmail.com

onde o $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ gera uma matriz melhor condicionada do que a original, favorecendo a convergência do método GC [4]. Uma das categorias de pré-condicionadores que preservam as propriedades da matriz $\mathbf{A}$ (simétrica e positiva definida) do sistema linear (2) é baseada na Fatoração Incompleta LU (ILU) [3] com preenchimento zero - ILU(0), que possui um baixo custo computacinal e fácil formulação [3]. Na ILU(0) obtém-se o pré-condicionador $\mathbf{C}$ como $\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{U}}$, onde $\widehat{\mathbf{L}}$ e $\widehat{\mathbf{U}}$ são os fatores triangulares $\mathbf{LU}$ calculados de forma incompleta, pois na fatoração ILU(0) são permitidos apenas preenchimentos nas posições correspondentes aos elementos não nulos de $\mathbf{A}$ [3].

Para verificar a influência do pré-condicionador ILU(0) no método GC realizou-se um estudo comparativo entre os métodos GC e GCPC-ILU(0) (veja a Tabela 1). Utilizou-se matrizes esparsas tridiagonais oriundas da discretização pelo método DFR do problema (1), com $\alpha = 1$; $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < 10$; $u(0, t) = 10$ e $u(10, t) = 30$. Desta forma, pode-se observar que o método GCPC-ILU(0) possui um menor erro de arredondamento e necessitou de apenas 1 iteração para as obtenções das soluções dos sistemas lineares. De fato, nota-se que ao aplicar a fatoração ILU(0) ao problema proposto equivale a fatoração $\mathbf{LU}$ completa. Porém, o interesse em utilizar o método iterativo GC é que, em determinados problemas envolvendo matrizes de grande porte e esparsas, a fatoração $\mathbf{LU}$ pode se tornar inviável, devido ao preenchimento do fator $\mathbf{U}$. Desta forma, objetivando-se trabalhos futuros, desenvolve-se diversos estudos numérico comparativos entre os métodos GC e GCPC-ILU(0) para diferentes matrizes $\mathbf{A}$ esparsas.

Tabela 1: Comparações entre os métodos GC e GCPC-ILU(0) com tolerância 10^{-2}.

	GC		GCPC - ILU(0)	
Dimensão da matriz $\mathbf{A}$	Iteração	Erro	Iteração	Erro
8×8	1	$1,6751 \cdot 10^{-4}$	1	$3,78653 \cdot 10^{-29}$
16×16	1	$3,0449 \cdot 10^{-3}$	1	$1,09178 \cdot 10^{-27}$
32×32	2	$2,4970 \cdot 10^{-6}$	1	$1,41522 \cdot 10^{-27}$
64×64	2	$5,9696 \cdot 10^{-4}$	1	$1,64982 \cdot 10^{-27}$
128×128	3	$1,0063 \cdot 10^{-3}$	1	$5,80587 \cdot 10^{-27}$
256×256	5	$3,2490 \cdot 10^{-3}$	1	$4,62373 \cdot 10^{-26}$
512×512	10	$4,40939 \cdot 10^{-3}$	1	$1,10649 \cdot 10^{-24}$

Referências

[1] R. L. Burden, D. J. Faires, A. M. Burden. *Análise Numérica*. P. T. Learning, São Paulo, 2003.

[2] M. C. C. Cunha. *Métodos Numéricos*. Editora UNICAMP, Campinas, 2000.

[3] Y. Saad. *Iterative Methods for Saparse Linear Systems*. SIAM Publications, Philadelphia, 2003.

[4] J. R. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. 1994.