

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Frequência de Acidente de uma Instalação Industrial com um Canal de Proteção Sujeito a Envelhecimento

Lucas G. Oliveira¹

Departamento de Engenharia Nuclear, Escola Politécnica, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Danielle G. Teixeira²

Programa de Engenharia Nuclear, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Paulo Fernando F. Frutuoso e Melo³

Programa de Engenharia Nuclear, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo

Analisa-se a confiabilidade de sistemas de proteção de instalações industriais para o caso de equipamentos sujeitos a envelhecimento, importante na extensão da vida útil qualificada das instalações. Por meio do método das variáveis suplementares, desenvolveu-se um sistema de equações integro-diferenciais parciais e ordinárias acopladas para as probabilidades de um sistema de proteção de um canal sujeito a envelhecimento, que foi resolvido por diferenças finitas. O modelo foi validado pela comparação com resultados de canais com tempos de falha exponenciais. O método das variáveis suplementares exibe resultados razoáveis para valores de atributos de confiabilidade típicos das instalações industriais.

Palavras-chave. Frequência de Ocorrência de Acidentes, Envelhecimento, Cadeias de Markov, Variáveis Suplementares, Diferenças Finitas, Sistemas de Proteção, Instalações Industriais.

1 Introdução

A análise da confiabilidade de componentes de sistemas de proteção é de suma importância [1, 2]. Mas, é necessário abordar os componentes que não se encontram mais em seu período de vida útil, ou seja, que estão envelhecendo. O propósito é o de permitir estabelecer políticas de inspeção e manutenção apropriadas que reduzam o custo e o tempo de parada da planta.

Neste caso, os tempos de falha não seguem mais distribuições exponenciais, o que implica na utilização de modelos com taxas de falha crescentes para representá-los, como as distribuições de Weibull ou lognormal [3], e o processo se torna não-markoviano [3]. Devem-se buscar alternativas. Nos métodos que utilizam processos estocásticos, um se

¹giehllucas@poli.ufrj.br

²dteixeira@con.ufrj.br

³frutuoso@con.ufrj.br

destaca: o das variáveis suplementares [3]. Este tem como vantagem a possibilidade de se gerar uma solução exata para o problema, descontando-se o erro numérico intrínseco e, não necessitando de métodos de otimização, como o dos estágios [3].

O objetivo deste trabalho é o de usar o método das variáveis suplementares para obter a frequência de acidente de uma instalação industrial equipada com um sistema de proteção constituído de um único canal, considerando o seu envelhecimento.

Para os sistemas de proteção, o parâmetro de confiabilidade de interesse é a sua indisponibilidade média, U , que depende das taxas de falha, λ , e de reparo, μ , do número de canais que o constituem, além da taxa de demanda ν e também das políticas de teste e manutenção e da sua lógica de atuação dos mesmos. O atributo que se considera é a frequência de ocorrência de acidentes, η [1], definida como:

$$\eta = \nu U(\lambda, \mu, \nu) \tag{1}$$

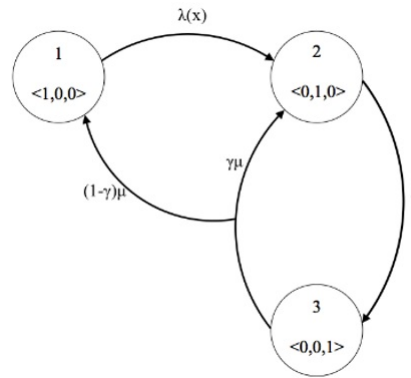


Figura 1: Diagrama de transição de estados para um canal envelhecendo

Considerando que um número inteiro de intervalos de teste é realizado num período de um ano, a frequência de ocorrência de acidentes será dada por [1]:

$$\eta = \frac{\nu}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} P_2(t) dt \tag{2}$$

onde $P_2(t)$ é a probabilidade do sistema estar com o canal falho (ou seja, no estado 2) e a falha não ter sido detectada e τ_p , o intervalo entre testes. A Eq.2 significa que os únicos eventos iniciadores de acidentes possíveis são os causados por demandas do sistema enquanto ele estiver falho e sua falha não tiver sido detectada, pois se assume que durante o reparo a planta está desligada (reparo *offline*).

2 Método das Variáveis Suplementares

Ainda que uma das taxas de transição seja função do tempo, o modelo será markoviano ao se inserir uma variável suplementar (x), a idade do canal. O sistema de equações

integro-diferenciais [3] será:

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = -\lambda(x)p_1(x, t) \tag{3}$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \int_0^\infty \lambda(x)p_1(x, t)dx - \nu P_2(t) + \gamma\mu P_3(t) \tag{4}$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \nu P_2(t) - \mu P_3(t) \tag{5}$$

onde $p_1(x, t)\Delta x\Delta t$ é a probabilidade do sistema estar no estado 1 entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$ e com idade entre x e $x + \Delta x$, $\lambda(x)$ é a taxa de falha do sistema, dependente da sua idade e t representa o tempo calendário. A probabilidade de erro humano é representada pela constante γ . A probabilidade do sistema se encontrar no estado 1 no instante t será dada por:

$$P_1(t) = \int_0^\infty p_1(x, t)dx \tag{6}$$

Os estados apresentados na Fig.1 possuem os seguintes significados: o estado 1 (sistema em funcionamento) é modelado por meio da densidade de probabilidade $p_1(x, t)$, o estado 2 representa o sistema com o canal falho e sua falha não foi revelada, com probabilidade $P_2(t)$ e o 3 representa o sistema falho, com a falha revelada, com probabilidade $P_3(t)$.

A condição inicial para a Eq.3 é:

$$p_1(x, 0) = f(x) \tag{7}$$

onde $f(x)$ é a densidade de probabilidade dos tempos de falha do canal. Admitimos que os tempos de falha seguem uma distribuição Weibull de 3 parâmetros. Teremos para $\lambda(x)$ e $f(x)$, respectivamente:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_0, & x < x_0 \\ \lambda_0 + \left(\frac{m}{\theta}\right) \left(\frac{x-x_0}{\theta}\right)^{m-1}, & x \geq x_0 \end{cases} \tag{8}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x}, & x < x_0 \\ \left(\lambda_0 + \left(\frac{m}{\theta}\right) \left(\frac{x-x_0}{\theta}\right)^{m-1}\right) e^{-\lambda_0 x - \left(\frac{x-x_0}{\theta}\right)^m}, & x \geq x_0 \end{cases} \tag{9}$$

onde m é o parâmetro de forma e $m > 1$, pois o sistema envelhece. θ é o parâmetro de escala, λ_0 , a taxa de falha do sistema antes dele envelhecer e, portanto, constante e x_0 , a idade do canal quando do início do seu envelhecimento. Além da Eq.7, necessitamos também das seguintes condições:

$$p_1(x_0, t) = (1 - \gamma)\mu P_3(t) \tag{10}$$

$$P_1(0) = 1 \tag{11}$$

$$P_i(0) = 0, \quad i = 2, 3 \tag{12}$$

A condição de contorno, Eq.10, mostra o estado do canal na idade x_0 . As probabilidades $P_1(x_0)$, $P_2(x_0)$ e $P_3(x_0)$ são conhecidas, pois antes do envelhecimento os tempos de falha são exponenciais. As Eq.11 e Eq.12 representam as probabilidades do sistema de proteção se encontrar em cada estado, 1, 2 ou 3, no início do funcionamento do mesmo, ou seja, em $t = 0$. É admitido que neste instante o sistema está funcionando.

É claro que:

$$\sum_{i=1}^3 P_i(t) = 1 \tag{13}$$

A partir da definição da Eq.2, nota-se que nos interessa apenas a probabilidade $P_2(t)$, pois como já mencionado, consideramos que se realizam somente reparos *offline*.

3 Solução do Sistema de Equações

O sistema de equações é acoplado. O método de solução escolhido foi o das diferenças finitas [4]. Para a solução numérica das integrais, foi usado o método de Simpson Composto [4]. O primeiro passo é definir a malha sobre a qual o método vai funcionar:

$$x_1 = x_0, \quad x_{j+1} = x_0 + j\Delta x, \quad x_{j+1} - x_j = \Delta x; \quad \forall j = 1, \dots, J \tag{14}$$

$$t_1 = 0, \quad t_{l+1} = l\Delta t, \quad t_{l+1} - t_l = \Delta t; \quad \forall l = 1, \dots, L \tag{15}$$

onde o índice j se refere à variável suplementar e o l representa o tempo calendário. Estendendo esta notação para as probabilidades, teremos:

$$p_1(x_j, t_l) = p_{1,j}^l, \quad \forall j = 1, \dots, J + 1; \quad l = 1, \dots, L + 1 \tag{16}$$

$$P_i(t_l) = P_i^l, \quad l = 1, \dots, L + 1, \quad i = 2, 3 \tag{17}$$

Aplicando as condições de contorno, Eqs.7 e 10-12, teremos, respectivamente:

$$p_{1,j}^1 = f_j, \quad \forall j = 1, \dots, J + 1 \tag{18}$$

$$p_{1,1}^l = (1 - \gamma)\mu P_3^l, \quad \forall l = 2, \dots, L + 1 \tag{19}$$

$$P_1^1 = 1 \tag{20}$$

$$P_i^1 = 0, \quad i = 2, 3 \tag{21}$$

Para a discretização da Eq.3, faremos a seguinte aproximação que pode ser justificada expandindo as duas probabilidade entre colchetes em séries de série de Taylor até os termos lineares e somando as expansões, membro a membro [4].

$$p_{1,j}^l \simeq \frac{1}{2} \left[p_{1,j+1}^l + p_{1,j-1}^l \right] \tag{22}$$

Para as derivadas parciais, temos:

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \simeq \frac{p_{1,j+1}^l - p_{1,j-1}^l}{2\Delta x} \tag{23}$$

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} \simeq \frac{p_{1,j}^{l+1} - p_{1,j}^l}{\Delta t} \tag{24}$$

Assim, substituindo a Eq.22 na Eq.24:

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} \simeq \frac{p_{1,j}^{l+1} - \frac{1}{2} [p_{1,j+1}^l + p_{1,j-1}^l]}{\Delta t} \tag{25}$$

Esta discretização é conhecida como método de Lax-Friedrichs e tem estabilidade condicionada [5]. Assim, a Eq.3 se tornará:

$$p_{1,j}^{l+1} = -\lambda_j \Delta t p_{1,j}^l + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) p_{1,j-1}^l + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) p_{1,j+1}^l \tag{26}$$

Esta equação é válida para $j = 2, \dots, J$; $l = 1, \dots, L$. Já, para $j = J + 1$, é utilizada a Eq.22 da seguinte forma:

$$p_{1,J+1}^{l+1} = 2p_{1,J}^{l+1} - p_{1,J-1}^{l+1} \tag{27}$$

Continuando, teremos então, para as derivadas:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} \simeq \frac{P_i^{l+1} - P_i^l}{\Delta t}; \forall l = 1, \dots, L, i = 2, 3 \tag{28}$$

Na Eq. 4 temos de aproximar numericamente a integral. Como mencionado anteriormente, o método escolhido foi o de Simpson Composto [4], portanto teremos:

$$\int_0^\infty \lambda(x) p_1(x, t) dx \simeq \frac{\Delta x}{3} \left[\lambda_1 p_{1,1}^l + 4 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}} \lambda_{2j} p_{1,2j}^l + 2 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}-1} \lambda_{2j+1} p_{1,2j+1}^l + \lambda_{J+1} p_{1,J+1}^l \right] \tag{29}$$

com J par. Substituindo a Eq.29 na Eq.4:

$$P_2^{l+1} = P_2^l + \Delta t \left[-\nu P_2^l + \gamma \mu P_3^l + I \right] \tag{30}$$

onde:

$$I = \frac{\Delta x}{3} \left(\lambda_1 p_{1,1}^l + 4 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}} \lambda_{2j} p_{1,2j}^l + 2 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}-1} \lambda_{2j+1} p_{1,2j+1}^l + \lambda_{J+1} p_{1,J+1}^l \right) \tag{31}$$

Finalmente, para a probabilidade $P_3(t)$, temos, substituindo a Eq.28 na Eq.5:

$$P_3^{l+1} = P_3^l + \Delta t \left[-\mu P_3^l + \nu P_2^l \right] \tag{32}$$

Para encontrar $P_1(t)$ aplicamos o método de Simpson Composto à Eq.6:

$$P_1^l = \frac{\Delta x}{3} \left(p_{1,1}^l + 4 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}} p_{1,2j}^l + 2 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}-1} p_{1,2j+1}^l + p_{1,J+1}^l \right) \tag{33}$$

Para a Eq.3, fazendo $l = 1$ teremos:

$$p_{1,1}^1 = f_1, p_{1,1}^2 = (1 - \gamma)\mu P_3^2 \tag{34}$$

$$p_{1,j}^2 = -\lambda_j \Delta t p_{1,j}^1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) p_{1,j-1}^1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) p_{1,j+1}^1, \forall j = 2, \dots, J \tag{35}$$

$$p_{1,J+1}^2 = 2p_{1,J}^2 - p_{1,J}^1, j = J + 1 \tag{36}$$

Dependendo dos valores de Δt e Δx adotados, a solução pode se tornar instável. Para este sistema de equações, o método é estável se $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ [5], obtida através da análise da Eq.26. Além desta condição, devemos ter também: $\Delta t \leq 1/\nu$ e $\Delta t \leq 1/\mu$, Eq.30 e Eq.32.

Podemos então calcular a frequência de ocorrência de acidentes, utilizando, novamente, o método de Simpson Composto:

$$\eta = \frac{\nu}{\tau_p} \frac{\Delta t}{3} \left(P_2^1 + 4 \sum_{l=1}^{\frac{L}{2}} P_2^{2l} + 2 \sum_{l=1}^{\frac{L}{2}-1} P_2^{2l+1} + P_2^{L+1} \right) \tag{37}$$

4 Resultados

Os dados de entrada empregados são apresentados na Tabela 1. Os sem referência bibliográfica foram adotados baseados na nossa experiência.

O método foi testado para tempos exponenciais (comparação com os resultados de [1]) e, também, para o caso do comportamento assintótico em relação à idade x .

Tabela 1: -Valores utilizados para o cálculo dos atributos de interesse

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
ν	10 ano ⁻¹ [5]	θ	1 ano
μ	52 ano ⁻¹ [5]	Δ_t	5x10 ⁻⁵
γ	0,1	Δ_x	5x10 ⁻⁵
τ_p	1 ano[5]	x_0	1 ano
λ_0	1,0 ano ⁻¹ [5]	t_{L+1}	2 anos
m	2,5	x_{J+1}	50 anos

Tabela 2: -Valores utilizados para o cálculo dos atributos de interesse

θ (anos)	ν (/ano)	μ (ano ⁻¹)
10,0	0,5	0,07
	10,0	0,21
	100,0	0,22
1,0	0,5	0,23
	10,0	0,93
	100,0	1,07

Comparando as frequências de ocorrência de acidente obtidos (Tabela 2) com os de [1], os valores obtidos são razoáveis: para valores maiores de m , os de η também o são. O método retorna valores razoáveis para taxas de demanda de todas as faixas.

De acordo com o número de pontos com que se define a malha, J e L , o tempo de cálculo cresce bastante, sendo L o que mais o afeta. Para $L > 10^6$, o tempo de cálculo é da ordem de 10 h. Isto implica em se ponderar sobre o refinamento da malha, até se encontrar um ótimo, e a de se manter o intervalo do tempo calendário, t , curto. A otimização do tamanho da malha foi estabelecida para que o resultado da integral da densidade de probabilidade tivesse um erro menor que 10^{-10} . Este valor foi escolhido por conta da precisão do método. Concluiu-se que para erros de ordem de grandeza maiores que 10^{-6} o método se tornava rapidamente instável. A escolha de erros de menor ordem de grandeza influencia o tempo de cálculo, uma vez que as integrais, que demandam maior esforço computacional, são todas em relação a x , ou seja, dependem de J . Os cálculos foram feitos em MATLAB v.2017.

5 Conclusões

O modelo desenvolvido pode servir como ferramenta para ajudar na tomada de decisões de políticas de reparo e extensão da vida útil de uma planta. A comparação do presente método com outros, por exemplo o dos estágios [3], pode também ser assunto de pesquisas seguintes. A aplicação de estudos de sensibilidade, por meio do Teoria Perturbação Generalizada [6], por exemplo, traria melhor entendimento do sistema e suas peculiaridades.

Referências

- [1] L.F. Oliveira and J.D.A. Netto. Influence of the Demand Rate and Repair Rate on the Reliability of a Single-Channel Protective System. *Rel. Eng.*, 17:267-276, 1987.
- [2] L.F. Oliveira, R. Youngblood, P.F. Frutuoso e Melo. Hazard Rate of a Plant Equipped with a Two-Channel Protective System Subject to a High Demand Rate. *Rel. Eng. Sys. Saf.*, 28:35-58, 1990.
- [3] C.Singh, R. Billinton. *System Reliability Modelling and Evaluation*. Hutchinson, London, 1977.
- [4] A.C. Alvim. *Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear*, Ed. Certa, Curitiba, 2007.
- [5] A.O Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, São Paulo, 2000.
- [6] E.F. Lima, D.G. Teixeira, P.F. Frutuoso e Melo, F.C. Silva, A.C.M. Alvim. Sensitivity Analysis of the Accident Rate of a Plant by the Generalized Perturbation Theory. *Int. J. Math. Mod. and Met. in Applied Sciences*, 10:309-316, 2016.