Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre a sobrevivência e extinção de processos de ramificação em meio variável

Luna Wagner Cunha[1]
André Pousa[2]
Pablo M. Rodriguez[3]
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, SP

1 Introdução

Neste trabalho iremos estudar o processo de ramificação em meio variável, o qual é uma generalização do chamado processo de Bienaymé-Galton-Watson. Tal processo, que é um tipo especial de cadeia de Markov, tem diversas aplicações em áreas como a biologia, entre outras (ver por exemplo [3]). Formalmente definimos o processo da seguinte maneira: Seja $Y_0, Y_1, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias discretas não-negativas e independentes. Chamamos *processo de ramificação em meio variável* (PRMV) à cadeia de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$ com valores no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$p_n(i,j) := P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 0 \text{ e } j = 0; \\ P\left(\sum_{r=1}^{i} Y_{n,r} = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0; \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } j > 0; \end{cases}$$

onde $Y_{n,1}, \ldots Y_{n,i}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) a Y_n, para $n \geq 0$. Dado um PRMV $(Z_n)_{n\geq 0}$ chamamos *extinção do processo* ao evento

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$$

e denotamos sua probabilidade de ocorrer por q. Se o evento anterior não ocorrer dizemos que há *sobrevivência do processo*. Neste trabalho iremos discutir sobre algumas das condições conhecidas na literatura para garantir a sobrevivência ou extinção de tais processos. Para isto iremos comparar resultados obtidos em [1] e [2].

[1]luna.cunha@usp.br
[2]andre.pousa@usp.br
[3]pablor@icmc.usp.br

2 Condições para sobrevivência e extinção

Denotamos por $g_j(s)$, para $j \geq 0$, à função geradora de probabilidades da variável aleatória Y_j. Por outro lado, sejam $P_n := \prod_{j=0}^{n-1} g_j'(1)$, $\nu_n := g_n''(1)/g_n'(1)^2$ e $\rho_n := \nu_n + (1/g_n'(1)) - 1$. Em [1] é enunciado e provado o seguinte teorema para a extinção do processo.

Teorema 2.1. *[1, Theorem 2] Seja $(Z_n)_{n\geq 0}$ um PRMV e suponha que*

$$\sup_{j\geq 0}\left\{\frac{g_j''(0)}{g_j''(1)}\right\} < \infty \quad e \quad \inf_{j\geq n_0}\left\{\frac{g_j''(0)}{g_j'(1)}\right\} > 0, \; \textit{para algum } n_0 \geq 0.$$

Então,

$$q = 1 \textit{ se, e somente se, } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{P_{j+1}} = \infty.$$

Já em [2] outro teorema é apresentado para a extinção do mesmo processo.

Teorema 2.2. *[2, Theorem 1] Seja $(Z_n)_{n\geq 0}$ um PRMV e suponha que*

$$E(Y_n^2; Y_n \geq 2) \leq c\, E(Y_n; Y_n \geq 2)\, E(Y_n | Y_n \geq 1),$$

para alguma constante $c < \infty$. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. $q = 1$;
2. $E(Z_n)^2 = o(E(Z_n^2))$ *conforme* $n \to \infty$;
3. $\sum_{j=0}^{\infty}(\rho_{j+1}/P_j) = \infty$;
4. $P_j \to 0$ *conforme* $j \to \infty$ *e/ou* $\sum_{j=0}^{\infty}(\nu_{j+1}/P_j) = \infty$.

Como já mencionado, iremos comparar as condições dos Teoremas 2.1 e Teorema 2.2, e outras existentes da literatura. Também discutiremos exemplos e aplicações de PRMV.

Agradecimentos

Esse trabalho é parte dos projetos de Iniciação Científica de Luna Wagner e André Pousa. L.W. agradece à FAPESP (Processo 17/17399-4) e A.P. ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] A. Agresti. On the Extinction Times of Varying and Random Environment Branching Processes, *J. Appl. Probab.*, 12:39–46, 1975.

[2] G. Kersting. A unifying approach to branching processes in varying environment, e-print arXiv:1703.01960.

[3] M. Kimmel, and D. E. Axelrod. *Branching Processes In Biology*. Springer -Verlag, New York, 2003.

