Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Dimensão de Equações Diferenciais Fracionárias

Lucas Kenjy Bazaglia Kuroda[1]
UNESP - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Botucatu, SP
Lislaine Cristina Cardoso[2]
UNESP - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Botucatu, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[3]
UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciência, Bauru, SP

Conhecido como Cálculo Fracionário (CF), o cálculo de ordem não inteira é apresentado como uma generalização do cálculo usual (integral e diferencial). O grande uso do CF por diversos autores é decorrente ao refinamento das soluções de algumas equações diferencias, ou seja, em diversos modelos matemáticos, a modelagem feita por equações diferenciais de ordem não inteira, conhecida como modelagem fracionária, fornece uma descrição mais apropriada do que a respectiva equação de ordem inteira, pois a mudança na ordem da derivada preserva os chamados efeitos de memória e, em alguns casos, minimiza o efeito de termos negligenciados na modelagem usual [1, 4].

Um ótimo exemplo é o modelo matemático do oscilador harmônico simples [5],

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = 0, \tag{1}$$

em que não há atritos nem forças externas atuando sobre o sistema. Mas quando utilizamos a modelagem fracionária, as soluções correspondem ao modelos do oscilador amortecido com algumas outras vantagens como, por exemplo, variação na frequência [5].

Uma das maneiras mais usuais e com grandes resultados de utilizar a modelagem fracionária nos modelos matemáticos, é substituir a odem da derivada inteira por uma ordem não inteira. Assim, o modelo fracionário de (1) será:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0, \tag{2}$$

com $1 < \alpha \leq 2$.

No entanto, é necessário analisar a dimensão física (unidades de medida) para não haver inconsistências quando mudamos a ordem da derivada. Assim, para qualquer equação diferencial, $\frac{df(t)}{dt} = F(t, f(t))$, em que o tempo seja analisado em segundos, temos que

[1]lucaskuroda@ibb.unesp.br
[2]lislaine@ibb.unesp.br
[3]rubens@fc.unesp.br

$\frac{d}{dt}$ tem unidade $segundo^{-1}$, enquanto $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ tem unidade $segundo^{-\alpha}$, com $0 < \alpha \leq 1$. No entanto, para não haver inconsistência dimensional, pode-se inserir uma constante τ, cuja dimensão é em *segundos*, para que $\left[\frac{1}{\tau^{1-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\right]$ tenha dimensão $segundo^{-1}$ [2,3].

Logo, a versão fracionária do modelo de ortem inteira será:

$$\frac{1}{\tau^{1-\alpha}} D^\alpha f(t) = F(t, f(t)). \tag{3}$$

Naturamente podemos tomar $a = (\tau^{1-\alpha})\overline{a}$, e assim trabalhar com o modelo fracionário com dimensão consistente: (4).

$$D^\alpha f(t) = F(a, t, f(t)). \tag{4}$$

Conclusões

Quando realizada a modelagem fracionária de qualquer equação diferencial, o novo modelo vai depender de dois novos parâmentros, α representando a ordem da derivada e τ para não haver inconsistência na dimensão. Testes foram analisados em [2] para analisar qual o melhor valor de τ a ser proposto para o modelo estudado no presente trabalho.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

[1] R. F. Camargo, and E. C. Oliveira. *Cálculo Fracionário*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 184p.

[2] L. C. Cardoso, F. L. P. Dos Santos, and R. F. Camargo. Analysis of fractional-order models for hepatitis B. *Comp. Appl. Math.*, 2018. DOI: 10.1007/s40314-018-0588-4.

[3] J. F. Gómez, J. J. Rosales, J. J. Bernal, and M. Guía. Mathematical modelling of the mass-spring-damper system-a fractional calculus approach. *Acta Universitaria.* 5:5-11,2012.

[4] L. K. B. Kuroda, A. V. Gomes, R. Tavoni, F. A. Mancera Paulo, N. Varalta, and R. F. Camargo. Unexpected behavior of Caputo fractional derivative. *Comp. Appl. Math.* 136:1173-1183, 2017.

[5] F. G. Rodrigues, E. C. de Oliveira. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Física.* 37:1-12, 2015. DOI: 10.1590/S1806-11173731842.