Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterização de famílias de sistemas fortemente monótonos

Paola Geovanna Patzi Aquino[1]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP
Geraldo Nunes Silva[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP

Considere o seguinte sistema dinâmico parametrizado

$$\dot{x}(t,\alpha) \in F(t, x(t,\alpha), \alpha) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [S,T],$$

onde $\mathcal{A}$ um espaço métrico compacto e cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

A solução para uma familia de multifunções $\{F(\cdot,\cdot,\alpha) : [S,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n / \alpha \in \mathcal{A}\}$ é uma familia de arcos $\{x(\cdot,\alpha) \in W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n)/\alpha \in \mathcal{A}\}$ tal que, para quase todo $t \in [S,T]$, tem-se,

$$\dot{x}(t,\alpha) \in F(t, x(t,\alpha), \alpha) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [S,T].$$

A seguinte definição pode ser encontrada em [1].

Definição 0.1. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função semicontínua inferiormente (s.c.i.).*

- *O sistema (φ, F) é fortemente decrescente se para qualquer trajetória $x(\cdot)$, tem-se $\varphi(x(t)) \leq \varphi(x(0))$ para todo $t \geq 0$. Isto equivale à função $t \mapsto \varphi(x(t))$ ser decrescente, sempre que $x(\cdot)$ seja uma trajetória.*

- *O sistema (φ, F) é fortemente crescente se para qualquer trajetória $x(\cdot)$ a função é $t \mapsto \varphi(x(t))$ é crescente.*

Na teoria clássica de multifunções temos caracterizado quando um sistema (φ, F) é fortemente decrescente (crescente), por exemplo em [1] fornece uma caracterização hamiltoniana. A saber

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.c.i. e F localmente Lipschitz, então (φ, F) é fortemente decrescente se e somente sé $H_F(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

onde

$$H_F(x,v) = \max_{v \in F(x)} \langle \xi, v \rangle, \quad \forall \xi \in \partial^P \varphi(x).$$

e

$$h_F(x,v) = \min_{v \in F(x)} \langle \xi, v \rangle, \quad \forall \xi \in \partial^P \varphi(x).$$

[1] paola-anahi_@hotmail.com
[2] gsilva@ibilce.unesp.br

Caracterizaremos este tipo de resultado quando a multifunção depende de um parâmetro que pertence a um conjunto compacto, sobre certas hipóteses sobre os dados. O seguinte resultado é para uma familia de sistemas fortemente crescentes.

Teorema 0.1. *Seja* $\mathcal{A}$ *um espaço métrico compacto finito. Seja* $\{\phi(\cdot,\cdot,\alpha)/\alpha \in \mathcal{A}\}$ *uma família de funções Lipschitz tal que* $\alpha \mapsto \phi(t,z,\alpha)$ *é contínua. Se* $F(\cdot,\cdot,\alpha)$ *é localmente Lipschitz, então* $(\{F(\cdot,\cdot,\alpha)\},\{\phi(\cdot,\cdot,\alpha)\})$ *é fortemente crescente sobre* $(S,T)\times C$ *se e só se existe uma medida de probabilidade* $\Lambda \in C^*(\mathcal{A})$ *tal que para todo* $(t,z)\in(S,T)\times C$ *e para alguns* $(\xi_\alpha,\eta_\alpha)\in\partial\phi(t,z,\alpha)$ *tem-se*

$$\int_E \big(\xi_\alpha + \min_{v\in F(t,z,\alpha)} \eta_\alpha \cdot v\big) d\Lambda(\alpha) \geq 0, \quad \forall E \in \beta^{\mathcal{A}}.$$

O que generaliza a teoria de sistemas fortemente crescentes e decrescentes. Este tipo de resultados são de utilidade por exemplo na aplicação a problemas de controle ótimo minimax, além de proporcionar certos critérios para caracterizar a teoria de Lyapuonov quando a dinâmica(multifunção) depende de parâmetros.

Agradecimentos

P.G.P. Aquino agradece a CAPES pelo auxilio financeiro e G.N. Silva agradece ao financiamento da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Sao Paulo - FAPESP através Centro de Ciências Matemáticas Aplicada a Indústria - CEMEAI-CEPID, processo 1307375-0.

Referências

[1] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski. *Nonsmooth analysis and control theory.* Springer, New York, 1998.

[2] R. B. Vinter. *Optimal Control.* Birkhauser, Boston, 2000.