Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Espectro do modelo de Anderson discreto d-dimensional

Roberto de Almeida Prado[1]
Departamento de Matemática e Computacão, FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP
Yino Beto Cueva Carranza[2]
Departamento de Matemática e Computacão, FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Operadores de Schrödinger aleatórios é um importante campo de pesquisa em Física Matemática (ver [1, 2]). Neste trabalho consideramos o modelo de Anderson discreto, que é a família de operadores de Schrödinger aleatórios

$$H_\omega = H_0 + V_\omega \tag{1}$$

sobre o espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, com dimensão $d \geq 1$, definidos da seguinte forma:
(a) H_0 é o Laplaciano discreto dado por

$$(H_0u)(n) := -\sum_{m:\|m-n\|_1=1} (u(m) - u(n)) \tag{2}$$

para $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ e com a norma $\|n\|_1 := |n_1| + \cdots + |n_d|$ para $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. O operador H_0 é auto-adjunto e limitado com $\|H_0\| \leq 4d$.
(b) Cada V_ω é um potencial aleatório atuando sobre $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ como operador de multiplicação, isto é, $(V_\omega u)(n) = V_\omega(n)u(n)$, em que $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ é uma sequência a valores reais de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma medida de probabilidade comum $\mathbb{P}_0$ definida por $\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(\{\omega : V_\omega(n) \in A\})$ para todo $n \in \mathbb{Z}^d$ e para qualquer conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, onde $\mathbb{P}$ é a medida de probabilidade sobre conjuntos borelianos cilíndricos de $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, ou seja,

$$\mathbb{P}(\{\omega : V_\omega(n_1) \in [a_1, b_1], \dots, V_\omega(n_k) \in [a_k, b_k]\}) = \mathbb{P}_0([a_1, b_1]) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_0([a_k, b_k]).$$

O objetivo principal deste trabalho é estudar o espectro dos operadores H_ω dados por (1), que por definição, é o conjunto $\sigma(H_\omega) = \mathbb{C} \setminus \rho(H_\omega)$ em que

$$\rho(H_\omega) = \left\{z \in \mathbb{C} : \text{ o operador } (H_\omega - zI)^{-1} \text{ existe e é limitado}\right\}.$$

O espectro $\sigma(H_\omega)$ representa as possíveis energias de um elétron movendo-se na rede $\mathbb{Z}^d$ e governado pelo operador H_ω. Primeiro determinamos o espectro de H_0 definido por (2). De fato, usando a transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2([0, 2\pi]^d), \quad (\mathcal{F}u)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} u(n)e^{-in\cdot x},$$

[1]robertoprado@fct.unesp.br
[2]gcueva_27@hotmail.com

mostra-se que $\left(\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}\psi\right)(x) = (\mathcal{M}_g\psi)(x)$, onde $\mathcal{M}_g$ denota o operador de multiplicação em $L^2([0,2\pi]^d)$ pela função $g(x) = 2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos x_i)$ para $x = (x_1,\ldots,x_d) \in [0,2\pi]^d$. Assim, H_0 é unitariamente equivalente a $\mathcal{M}_g$, o que implica que seu espectro é dado por $\sigma(H_0) = \sigma(\mathcal{M}_g) = \overline{Im(g)} = [0,4d]$ e que H_0 tem espectro absolutamente contínuo puro.

Para determinarmos o espectro de H_ω, consideremos o suporte da medida $\mathbb{P}_0$:

$$\text{supp }\mathbb{P}_0 = \{x \in \mathbb{R} : \ \mathbb{P}_0((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}.$$

Se supp $\mathbb{P}_0$ é compacto, então o operador $H_\omega = H_0 + V_\omega$ é limitado e auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Por outro lado, se supp $\mathbb{P}_0$ não é compacto, o operador de multiplicação V_ω é auto-adjunto no domínio $D = \{\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) : \ V_\omega\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)\}$ e daí H_ω é auto-adjunto em D. Além disso, como H_0 é limitado, segue do Teorema de Kato-Rellich (ver detalhes em [3]) que H_ω é essencialmente auto-adjunto sobre o espaço

$$\ell_0^2(\mathbb{Z}^d) = \{\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) : \ \varphi(k) = 0 \ \ \forall\ k, \text{ exceto para um número finito de pontos } k\}.$$

O teorema a seguir é o principal resultado deste trabalho, cuja demonstração pode ser encontrada em [1, 2]. Tal resultado descreve explicitamente o espectro dos operadores H_ω dados por (1).

Teorema 0.1. *O espectro do modelo de Anderson H_ω é $\mathbb{P}-$ q.t.p. dado por*

$$\sigma(H_\omega) = [0,4d] + \mathit{supp}\ \mathbb{P}_0\ . \tag{3}$$

A igualdade (3) nos diz, em particular, que o espectro $\sigma(H_\omega)$ é $\mathbb{P}-$q.t.p. um conjunto não aleatório. Isto também pode ser obtido do fato que o modelo de Anderson H_ω é uma família ergódica de operadores auto-adjuntos (ver detalhes em [2]) e devido ao Teorema de Pastur (Teorema 4.3 em [2]) existe um conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que $\sigma(H_\omega) = \Sigma,\ \omega\ \mathbb{P}-$q.t.p..

Agradecimentos. Agradecemos a CAPES pelo suporte financeiro. O segundo autor é bolsista de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da FCT-UNESP.

Referências

[1] M. Aizenman and S. Warzel. *Random Operators: disorder effects on quantum spectra and dynamics.* American Mathematical Society, vol. 168, Providence, 2015.

[2] W. Kirch. An Invitation to Random Schrödinger Operators. Panor. Synthèses, vol. 25, Random Schrödinger Operators, pp. 1-119, *Société Mathématique de France*, Paris, 2008.

[3] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. II: Fourier analysis, selfadjointness.* Academic Press, New York, 1975.