Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Formulação da Hidrodinâmica com Álgebra Geométrica

Emerson Dionísio Belançon[1]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT, Rondonópolis, MT.
Samuel da Silva[2]
Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, SP.

1 Motivação

Já é bem conhecido que as equações de Maxwell do Eletromagnetismo podem ser descritas através da álgebra geométrica [1], [3]. Já as equações da hidrodinâmica envolvendo escoamento potencial de fluidos ideais também podem ser descritas de forma bem compacta e elegante com esta mesma abordagem. Neste sentido, este artigo apresenta uma introdução sucinta das equações da hidrodinâmica a partir da álgebra geométrica.

2 Equações da Hidrodinâmica com Álgebra Geométrica

Assumindo o espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, pode-se construir quatro outros espaços vetoriais cuja a soma direta destes espaços é denominado *espaço multivetorial* e denotado por $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$. Neste espaço, o produto geométrico entre dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \bigwedge(\mathbb{R}^3)$ é definido por $\mathbf{uv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, onde o primeiro termo do lado direita da equação é o produto escalar e o segundo termo é o produto exterior (ou de Grassmann) e resulta em um bivetor, [3].

Pode-se aplicar o produto geométrico entre o operador nabla e a função a ser derivada, como segue $\nabla\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \wedge \mathbf{v}$.

As equações fundamentais que governam o movimento de um fluido incompressível e ideal, ou seja, com viscosidade nula, são:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{Equação da Continuidade.} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathcal{L} - \nabla\Phi \qquad \text{Equação de Navier-Stokes.} \tag{2}$$

[1]edbelancon@gmail.com
[2]samuel.silva13@unesp.br

onde $\Phi = \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gz$ é o *potencial escalar de Bernoulli*, $\mathcal{L} = \omega \times \mathbf{v}$ um *vetor auxiliar* e $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ é o *campo de vorticidade*, [2].

Calculando o rotacional da equação (2), derivando em relação ao tempo a equação (1) e depois derivando $\mathcal{L}$ também em relação ao tempo e agrupando estes resultados em um sistema compacto de quatro equações semelhantes as de Maxwell obtém-se:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{L} = j \qquad \text{onde} \qquad j = -\nabla^2 \Phi \\ \nabla \times \omega = \mathbf{J} + \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad \text{onde} \quad \mathbf{J} \equiv \frac{1}{\mathbf{v}^2}\{j\mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \omega)\mathbf{v} + \omega \times \nabla(\Phi + \mathbf{v}^2) + 2(\mathcal{L} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} \\ \nabla \times \mathcal{L} = -\dfrac{\partial \omega}{\partial t} \\ \nabla \cdot \omega = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Para descrever o sistema de equações em (3) com apenas uma equação, pode-se definir um operador multivetorial $\mathcal{D} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial}{\partial t} + \nabla$ e um multivetor $\mathcal{F} = \mathcal{L} + \mathbb{I}\omega$, onde $\mathbb{I}$ representa um trivetor simples unitário que satisfaz $\mathbb{I}^2 = -1$.

Calculando o produto geométrico entre $\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}$ e agrupando os termos em ordem crescente das grades tem-se

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \underbrace{\nabla \cdot \mathcal{L}}_{escalar} + \underbrace{\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \nabla \times \omega\right)}_{vetor} + \mathbb{I}\underbrace{\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{L}\right)}_{bivetor} + \underbrace{\mathbb{I}\nabla \cdot \omega}_{trivetor}. \tag{4}$$

Comparando a equação (4) com o sistema de equações (3) é possível concluir, que se definir um multivetor $\mathcal{J} = j - \mathbf{J}$ de modo que o bivetor e o trivetor sejam iguais a zero, o sistema de equações (3) podem ser escrito como uma única equação, a saber $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{J}$.

O que simplifica consideravelmente as equações que devem ser resolvidas para descrição de um escoamento potencial.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq, PPGEM/UNESP.

Referências

[1] G. F. L. Ferreira. Uma mini-introdução à concisa álgebra geométrica do eletromagnetismo, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 28:441–443, 2006.

[2] H. Marmanis. Analogy between the Navier–Stokes equations and Maxwell equations: Application to turbulence, *Physics of fluids*, 10:1428–1437, 1998.

[3] J. Vaz Jr. A Álgebra Geométrica do Espaço Euclideano e a Teoria de Pauli, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 19:234–259, 1997.

