Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos do tipo Newton aplicados a métodos de Restauração Inexata

Francis Larreal Herrera[1]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP
Luis Felipe Bueno[2]
Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, UNIFESP, São José Dos Campos, SP

Há muito tempo atrás, por inúmeros motivos, é necessário resolver sistemas de equações. Existem vários métodos numéricos iterativos que aproveitam a ajuda dos computadores para este propósito, dos quais podemos destacar dois: o *método de Newton* e o *método de Brent*. Ambos algoritmos podem ser aplicados sempre que F, a função vetorial descrita pelas mesmas equações do sistema, seja de classe C^1. No primeiro método, em cada iteração são consideradas todas as equações do problema simultaneamente; no segundo, as equações são particionadas em blocos disjuntos e em cada iteração cada bloco é considerado separadamente e de forma ordenada, tentando manter o progresso obtido pelo tratamento dos blocos anteriores. Ambos métodos calculam a solução de sistemas lineares consistentes em apenas uma iteração, como é demonstrado em [1]. No caso de sistemas não lineares consistentes, para ambos métodos é possível mostrar resultados de *convergência local quadrática*, com algumas hipóteses adicionais sobre o diferencial de F em uma vizinhança da solução, como feito em [2] e [3].

As ideias do método de Newton são amplamente aproveitadas no cenário de otimização irrestrita, onde é útil computar pontos estacionários. Se existir tal ponto e a função objetivo f é de classe C^2, com algumas hipóteses adicionais sobre a hessiana da f em uma vizinhança do ponto estacionário, é possível modificar o algoritmo de Newton para este contexto, preservando a propriedade de convergência local quadrática, como é demonstrado em [4]. Existem também muitos outros métodos para otimização baseados nestas noções, chamados *métodos Quase-Newton*, nos quais a matriz hessiana da f pode ser aproximada por outra matriz com propriedades interessantes e que seja mais fácil de computar; muitos destes métodos geram sequências que apresentam *convergência linear* ou *superlinear* à solução, quando cumprem hipóteses similares às consideradas para o método de Newton, como pode ser visto em [4] .

No cenário de otimização com restrições, caso a função objetivo e as restrições tenham boas propriedades de diferenciabilidade, também há espaço para ideias dos tipos Newton, Brent e Quase-Newton, comumente aplicadas à *função lagrangiano*, $L(x, \lambda)$. Uma classe de métodos para otimização com restrições são os *métodos de Restauração Inexata (RI)*,

[1]ra192814@ime.unicamp.br
[2]l.bueno06@unifesp.br

nos quais, a partir de um ponto, o seguinte elemento da sequência gerada pelo algoritmo é calculado em dois passos: uma fase de *restauração*, na qual procura-se encontrar um ponto intermediário com melhor medida de viabilidade, sem piorar muito a medida de otimalidade; depois, a partir desse ponto intermediário, é calculado o próximo elemento da sequência na fase de *otimização*, na qual tenta-se melhorar a medida de otimalidade, sem piorar muito a de viabilidade.

Para um problema de otimização com restrições de igualdade, se a função objetivo e as restrições são funções de classe C^2, um método de RI poderia ser naturalmente construído de modo que na fase de restauração seja resolvido um problema de minimização com restrições lineares de igualdade e na fase de otimização seja resolvido apenas um sistema de equações lineares envolvendo o lagrangiano. Este método pode ser deduzido a partir de adaptações do método de Brent. A partir deste método de RI, podem ser propostos outros dois algoritmos para resolver problemas de otimização, visando melhorar a medida de factibilidade ainda na etapa de otimização: o primeiro deles, é pensado calculando uma iteração de um método quase-Newton para tratar as restrições, e o segundo, calculando uma iteração do método de Newton. Para este método RI, assim como para os dois métodos propostos é possível provar resultados de convergência local quadrática, com hipóteses similares às do método de Brent.

Agradecimentos

Os meus agradecimentos ao Professor Doutor Luís Felipe Bueno, quem foi o orientador deste trabalho durante o mestrado na Matemática Aplicada na Universidade Federal de São Paulo, pelo esforço dedicado e pela experiência formadora e enriquecedora; agradecimentos também a todo o corpo docente deste Programa de Pós-Graduação, pelo seu apoio e direcionamento oferecido, assim como pelos conhecimentos compartilhados. Agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por providenciar a oportunidade e os recursos para o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

[1] M. Allen and E. Isaacson. *Numerical Analysis for Applied Science*. WILEY, Nova Iorque, 1998.

[2] D. M. Gay, Brown's method and some generalizations, with applications to minimization problems. Tese de Doutorado, Cornell University, 1975.

[3] D. G. Luenberger and Y. Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, Nova Iorque, 2008.

[4] J. M. Martínez, Generalization of the methods of Brent and Brown for solving nonlinear simultaneous equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16:434-448, 1979. DOI: 10.1137/0716036.