Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre o Grafo de K-incidência para o K-Problema Discretizável de Geometria de Distâncias

Germano Abud de Rezende[1]
Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia, MG
Jorge Alencar[2]
Instituto Federal do Sul de Minas, Inconfidentes, MG

1 Introdução

O Problema de Geometria de Distâncias (**DGP**) consiste em determinar se existe uma realização de um grafo simples, ponderado, $G = (V, E, d)$, em algum espaço euclidiano, de forma que as distâncias entre as realizações de pares de vértices u e v coincidam com o peso d_{uv} da aresta $\{u, v\}$. Uma subclasse importante de problemas é chamada de **DDGP** (DGP discretizável) e consiste de um DGP onde algumas hipóteses adicionais permitem que o problema seja discretizado. Neste trabalho apresentaremos os grafos de K-discretização e de K-incidência para o DDGP.

Dados K vértices $v_1, \ldots, v_K$ em V denotaremos por $S(v_1, \ldots, v_K)$ o volume do simplex que é uma realização destes vértices. Iremos supor $|V| = n$ e denotar por $G[U]$ o subgrafo de G induzido por $U \subset V$.

Definição 1. *Dados um grafo simples, ponderado, não-direcionado $G = (V, E, d)$, um inteiro positivo K, e uma ordem em V tal que para cada $j \in \{K + 1, \ldots, n\}$ existem K vértices $v_{i_1}, \ldots, v_{i_K}$ satisfazendo*

(i) $G[v_{i_1}, \ldots, v_{i_K}]$ *é uma clique;*

(ii) $v_{i_1} < v_j, \ldots, v_{i_K} < v_j$;

(iii) $\{\{v_{i_1}, v_j\}, \ldots, \{v_{i_K}, v_j\}\} \subset E$;

(iv) $\mathcal{S}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_K}) > 0$,

o Problema Discretizável de Geometria de Distâncias (DDGP) consiste em determinar uma realização

$$x : V \to \mathbb{R}^K, \text{ tal que } \forall \{u, v\} \in E, \quad ||x(u) - x(v)|| = d_{uv},$$

onde d_{uv} é o comprimento da aresta $\{u, v\}$ e $|| \cdot ||$ é a norma euclidiana.

Todas as soluções do DDGP podem ser encontradas através de um algoritmo conhecido como Branch-and-Prune (**BP**) [2].

[1] germano.abud@ufu.br
[2] jorge.alencar@ifsuldeminas.edu.br

2 Os Grafos de K-discretização e de K-incidência

Seja $K > 0$ um inteiro e $G = (V, E, d)$ uma instância de um DGP. Denote por $N(v)$ o conjunto de vértices adjacentes a $v \in V$.

Definição 2. *O grafo de K-discretização $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, V_{\mathcal{E}})$ de G é um grafo simples, não-direcionado, tal que $\forall v \in V$, o vértice $\mathfrak{v} \in V_{\mathcal{G}}$ é o conjunto $N(v) \cup \{v\}$; e $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} \in E_{\mathcal{G}}$ se, e somente se, $|\mathfrak{u} \cap \mathfrak{v}| \geq K$.*

O grafo de K-discretização está definido para um DPG, já que as hipóteses adicionais sobre a ordem em V não são necessárias. Observe ainda que se $\mathcal{G}$ não é conexo ou se nenhum subconjunto de $\mathfrak{v} \in V_{\mathcal{G}}$ induz um subgrafo de G contendo uma K-clique, então o problema associado a G não pode ser discretizado [1]. O conjunto $\underline{\mathfrak{u}}_i = \mathfrak{u}_i \cap \{u_j \in V : j \leq i\}$ contém todos os vértices adjacentes a $u_i \in V$ que podem ser usados como vértices de referência. Para aplicar o BP, é necessário identificar um subconjunto $\hat{\mathfrak{u}}_i$ de $\underline{\mathfrak{u}}_i$ que contém os K vértices utilizados como referência.

Definição 3. *Dado um inteiro $K > 0$ e $G = (V, E, d)$ uma instância de um DDGP, o grafo de K-incidência $\mathcal{I} = (V_{\mathcal{I}}, E_{\mathcal{I}})$ de G é um subgrafo de $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ tal que $V_{\mathcal{I}} = V_{\mathcal{G}}$, e $\{\mathfrak{u}_i, \mathfrak{u}_j\} \in E_{\mathcal{I}}$ se, e somente se, $|\hat{\mathfrak{u}}_i \cap \hat{\mathfrak{u}}_j| = K$.*

O grafo de K-incidências tem algumas propriedades importantes como, por exemplo, que todo ciclo está (necessariamente) contido em uma clique [1] e qualquer caminho mínimo entre dois de seus vértices é único [1]. Observe ainda que o grafo de K-incidência depende da ordem dada em G (não temos unicidade), mas as propriedades em que estamos interessados independem da ordem escolhida.

3 Conclusões

O grafo de K-discretização pode ser útil para se determinar uma ordem sobre o conjunto de vértices V satisfazendo as hipóteses do DDGP. Em [3] os autores apresentam um algoritmo para determinar a cardinalidade do conjunto solução do DMDGP, que é uma subclasse do DDGP. Nosso objetivo é utilizar o grafo de K-incidência para determinar a cardinalidade do conjunto solução de um DDGP e obter informações sobre as suas simetrias.

Referências

[1] G. Abud, J. Alencar, C. Lavor,L. Liberti, A. Mucherino, The K-discretization and K-incident graphs for discretizable Distance Geometry, *Optimization Letters*, submitted.

[2] L. Liberti, C. Lavor, N. Maculan, A. Mucherino, Euclidean Distance Geometry and Applications,*SIAM Review* 56, 3-69, 2014.

[3] L. Liberti, C. Lavor, J. Alencar, G. Abud, Counting the number of solutions of K-DMDGP instances, Liberti, L., *In Geometric Science of Information* (pp. 224-230), LNCC. Springer, Berlin, 2013.

