Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Generalizações para derivadas fracionárias

Daniela dos Santos de Oliveira[1]
E. Capelas de Oliveira[2]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Apresentamos generalizações para as derivadas fracionárias. Inicialmente discutimos, a partir de uma modificação do tipo Caputo na derivada fracionária generalizada, a chamada derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo. Discutimos ainda uma outra proposta para a generalização dos operadores de diferenciação fracionários. Esta generalização consiste em uma derivada fracionária do tipo Hilfer, a qual denominamos derivada fracionária de Hilfer-Katugampola. Por fim, de modo a generalizar ainda mais as derivadas fracionárias, propomos a derivada (k,ρ)-fracionária generalizada. Esta formulação, mais geral do que as anteriores recupera, como casos particulares, derivadas fracionárias bem conhecidas na literatura.

Palavras-chave. Derivadas fracionárias, Generalização, modificação do tipo Caputo, Hilfer-Katugampola, Derivada (k,ρ)-fracionária generalizada

1 Introdução

O número de operadores de integração e diferenciação fracionários tem aumentado muito ao longo dos últimos anos. As derivadas de ordem não inteira são, geralmente, expressas em termos de uma correspondente integral fracionária.

Nosso interesse está em discutir derivadas fracionárias que podem ser representadas em termos de integrais fracionárias cujos núcleos são singulares. Existem três núcleos a serem considerados para as integrais fracionárias, são eles:

$$\text{(i)}\quad (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad t^{-1}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} \qquad\qquad \text{(iii)}\quad t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1},$$

onde $k>0$ e $\rho>0$. No caso em que $\rho\to 1$ em (iii), obtemos o núcleo dado por (i) e no caso em que $\rho\to 0^+$ em (iii) temos uma indeterminação. Usando a regra ℓ'Hôpital obtemos o núcleo (ii).

Existem três formas diferentes para definir as derivadas fracionárias. A primeira consiste em aplicar um operador de diferenciação de ordem inteira à esquerda de uma integral fracionária. A segunda forma é aplicar a integral fracionária em um operador de diferenciação de ordem inteira. Finalmente, a terceira forma consiste em aplicar um operador

[1]daniela@ime.unicamp.br
[2]capelas@ime.unicamp.br

de diferenciação de ordem inteira entre duas integrais fracionárias. Os operadores de diferenciação a serem considerados são:

$$\text{(a) } D^n \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^n, \qquad \text{(b) } \delta^n \equiv \left(x\frac{d}{dx}\right)^n, \qquad \text{(c) } \delta^n_\rho \equiv \left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n,$$

onde $n-1 < \alpha \leq n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $\rho > 0$. Note que, quando $\rho \to 1$ em (c), obtemos o operador definido em (a) e quando $\rho \to 0^+$, recuperamos o operador dado por (b). As derivadas de ordem não inteira que queremos discutir são combinações das integrais fracionárias com os núcleos dados em (i), (ii) e (iii) com os operadores de diferenciação de ordem inteira dados em (a), (b) e (c).

2 Funções especiais

Apresentamos o conceito de k-$*$, onde $*$ denota a função gama ou o símbolo de Pochhammer [3,4,12]. Estas funções especiais e suas propriedades são definidas para valores complexos, porém consideramos apenas valores reais.

2.1 Função k-gama

A função gama, $\Gamma(z)$, generaliza o fatorial e permite que os valores de z sejam não inteiros ou mesmo complexos [1]. A fim de generalizar esta função Díaz e Pariguan [3] definiram a função k-gama da seguinte forma

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-\frac{t^k}{k}}\, dt, \quad \text{com} \quad x, k > 0. \tag{1}$$

2.2 O símbolo k-Pochhammer

Díaz e Pariguan [3] generalizaram também o símbolo de Pochhammer através da inserção de um parâmetro, $k > 0$, de modo a obter o símbolo k-Pochhammer dado por

$$(x)_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{for} \quad n = 0 \\ x(x+k)\cdots(x+(n-1)k), & \text{for} \quad n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Para $k \to 1$, recuperamos o clássico símbolo de Pochhammer, i.e., $(x)_{n,k} = (x)_n$, [5].

2.3 Funções k-Mittag-Leffler

Por ser uma generalização da função exponencial, as funções de Mittag-Leffler desempenham um papel muito importante na solução de equações diferenciais fracionárias e equações integrais [2,7,11]. A fim de generalizar tais funções, Gupta e Parihar [6] definiram a nova função k-Mittag-Leffler generalizada através da seguinte série:

$$E_{k,\xi,\sigma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma_k(\xi n + \sigma)}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \xi > 0, \quad \sigma > 0, \tag{3}$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Para recuperar a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, basta considerar $k = 1$.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0279

3 Derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo

Nesta seção, introduzimos a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo através de uma modificação do tipo Caputo na derivada fracionária generalizada [10, 13, 15].

Definição 3.1. *Sejam $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ e $\rho > 0$. As derivadas fracionárias generalizadas com uma modificação do tipo Caputo, à esquerda e à direita, são definidas, para $0 \le a < x < b \le \infty$ com*

$$\varphi \in AC^n_{\delta_\rho}[a,b] = \left\{ \varphi : [a,b] \to \mathbb{C} : (D^{n-1}\varphi)(x) \in AC[a,b], D = \frac{d}{dx} \right\}$$

por

$$\begin{aligned} ({}^\rho_* \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) &= ({}^\rho \mathcal{J}^{n-\alpha}_{a^+} \delta^n_\rho \varphi)(x) &(4)\\ &= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t)\, dt, &(5) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ({}^\rho_* \mathcal{D}^\alpha_{b^-}\varphi)(x) &= (-1)^n ({}^\rho \mathcal{J}^{n-\alpha}_{b^-} \delta^n_\rho \varphi)(x) \\ &= \frac{(-1)^n \rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t)\, dt, &(6) \end{aligned}$$

respectivamente, se as integrais existem. Se $\alpha \in \mathbb{N}_0$, então $({}^\rho_* \mathcal{D}^n_{a^+}\varphi)(x)$ e $({}^\rho_* \mathcal{D}^n_{b^-}\varphi)(x)$ são representadas por

$$({}^\rho_* \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) = \delta^n_\rho \varphi(x) \quad e \quad ({}^\rho_* \mathcal{D}^\alpha_{b^-}\varphi)(x) = (-1)^n \delta^n_\rho \varphi(x). \tag{7}$$

Em particular, temos

$$({}^\rho_* \mathcal{D}^0_{a^+}\varphi)(x) = ({}^\rho_* \mathcal{D}^0_{b^-}\varphi)(x) = \varphi(x).$$

Apresentamos a seguir um teorema que permite recuperar, com os convenientes limites, as derivadas fracionárias de Caputo e Caputo-Hadamard.

Teorema 3.1. *Sejam $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ e $\rho > 0$. Então, para $x > a$*

$$\lim_{\rho \to 1} ({}^\rho_* \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) = ({}_* \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \varphi^{(n)}(t) dt. \tag{8}$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} ({}^\rho_* \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) = ({}^C \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n \varphi(t) dt, \tag{9}$$

onde $({}_* \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x)$ é a derivada fracionária de Caputo e $({}^C \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\varphi)(x)$ é a derivada fracionária de Caputo-Hadamard [8, 13].

4 Derivada fracionária de Hilfer-Katugampola

Nesta seção, apresentamos uma outra proposta para a derivada fracionária, a derivada de Hilfer-Katugampola [13,14]. Esta é uma derivada fracionária do tipo Hilfer, isto é, temos um operador de diferenciação de ordem inteira atuando entre duas integrais fracionárias de Katugampola [9].

Definição 4.1. *Sejam* α *a ordem e* β *o tipo da derivada, satisfazendo* $n-1<\alpha\leq n$ *e* $0\leq\beta\leq 1$*, com* $n\in\mathbb{N}$*. As derivadas fracionárias, à esquerda e à direita, com* $\rho>0$*, de uma função*

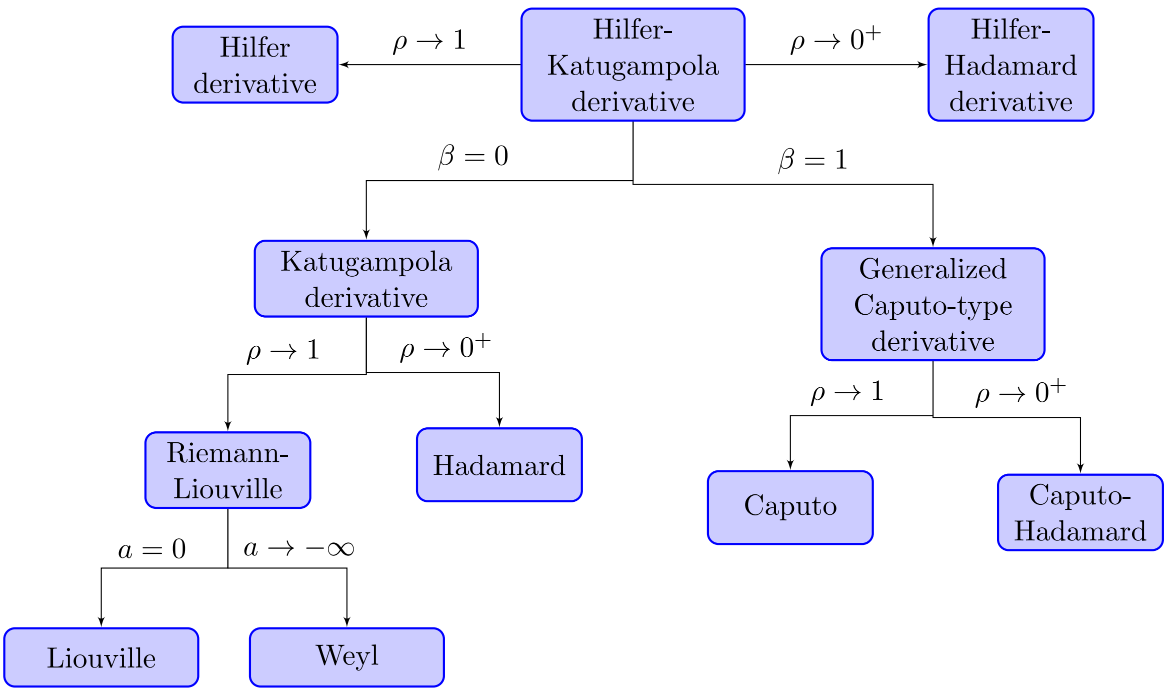
$$\varphi \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b] = \left\{ \varphi : (a,b] \to \mathbb{R} : \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \varphi(x) \in C[a,b] \right\}, \tag{10}$$

são definidas por

$$\begin{aligned} ({}^\rho\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{a\pm}\varphi)(x) &= \left(\pm\, {}^\rho\mathcal{J}^{\beta(n-\alpha)}_{a\pm}\left(t^{\rho-1}\frac{d}{dt}\right)^n {}^\rho\mathcal{J}^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a\pm}\varphi\right)(x) \\ &= \left(\pm\, {}^\rho\mathcal{J}^{\beta(n-\alpha)}_{a\pm}\delta^n_\rho\, {}^\rho\mathcal{J}^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a\pm}\varphi\right)(x), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{J}$ *é a integral fracionária generalizada* [9].

Através do seguinte esquema, ilustramos as derivadas fracionárias que são casos particulares desta derivada que acabamos de definir.



5 Derivada (k,ρ)-fracionária generalizada

Antes de apresentar nossa terceira definição para derivadas fracionárias, explicitamos a definição para a integral (k,ρ)-fracionária [18].

Definição 5.1. *Sejam $\alpha > 0$, $k > 0$, $\rho > 0$ e $\varphi \in L(a,b)$. A integral (k,ρ)-fracionária, à esquerda, é definida por*

$$({}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) = \frac{1}{k\,\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} t^{\rho-1}\varphi(t)dt, \quad x > a, \tag{11}$$

Quando $k \to 1$, temos $\Gamma_k(\alpha) \to \Gamma(\alpha)$ e ${}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+} \to {}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}$, onde ${}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}$ é a integral fracionária generalizada definida por Katugampola [9].

Apresentamos a seguir a derivada (k,ρ)-fracionária generalizada [13, 16]

Definição 5.2. *Sejam $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ tais que $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \nu \leq 1$, $\rho > 0$, $k > 0$ e $\varphi \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b]$. Definimos a derivada (k,ρ)-fracionária generalizada por*

$$\begin{aligned}({}^{\rho}_{k}\mathscr{D}^{\alpha,\nu}_{a^+}\varphi)(x) &= \left({}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{\nu(nk-\alpha)}_{a^+}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n \left(k^n\, {}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{(1-\nu)(kn-\alpha)}_{a^+}\varphi\right)\right)(x) \qquad (12)\\ &= \left({}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{\nu(nk-\alpha)}_{a^+}\,\delta^n_\rho \left(k^n\, {}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{(1-\nu)(kn-\alpha)}_{a^+}\varphi\right)\right)(x), \qquad (13)\end{aligned}$$

onde $\delta^n_\rho = \left(x^{1-\rho}\dfrac{d}{dx}\right)^n$.

Com a escolha adequada dos parâmetros, na Definição 5.2, recuperamos algumas derivadas fracionárias bem conhecidas na literatura, a saber:

- Se $n = 1$. Derivada (k,ρ)-fracionária;
- Se $k = 1$ e $n = 1$. Derivada fracionária de Hilfer-Katugampola;
- Se $k = 1$ e $\rho = 1$. Derivada fracionária de Riemann-Liouville generalizada;
- Se $k = 1$, $\rho \to 0^+$ e $n = 1$. Derivada fracionária de Hilfer-Hadamard;
- Se $k = 1$, $\rho = 1$ e $n = 1$. Derivada de Hilfer;
- Se $k = 1$, $\rho = 1$ e $\nu = 0$. Derivada fracionária de Riemann-Liouville;
- Se $k = 1$, $\rho = 1$ e $\nu = 1$. Derivada de Caputo;
- Se $k = 1$, $\rho \to 0^+$ e $\nu = 0$. Derivada fracionária de Hadamard;
- Se $k = 1$, $\rho \to 0^+$ e $\nu = 1$. Derivada fracionária de Caputo-Hadamard;
- Se $k = 1$ e $\nu = 0$. Derivada fracionária generalizada de Katugampola;

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0279

- Se $k = 1$ e $\nu = 1$. Derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo.

Apresentamos a seguir a solução de um problema de Cauchy envolvendo a derivada (k,ρ)-fracionária generalizada.

Teorema 5.1. *Sejam $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^*$ tais que $n-1 < \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Se $\varphi \in L(a,b)$, então o problema de Cauchy*

$$({}_k^\rho\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\nu}\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) \tag{14}$$

$$({}_k^\rho\mathcal{J}_{a^+}^{(1-\nu)(kn-\alpha)-k(n-j)}\varphi)(a^+) = b_j,\ b_j \in \mathbb{R},\ (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

admite uma única solução no espaço $L(a,b)$, dada por

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\Lambda - j} E_{k,\alpha,k(\Lambda-j+1)}\left[\lambda\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right], \tag{16}$$

onde $E_{k,\xi,\sigma}(\cdot)$ é a nova função k-Mittag-Leffler generalizada, definida pela Eq.(3).

6 Conclusões

A fim de resolver equações diferenciais fracionárias é necessário, para tal tarefa, escolher um operador de diferenciação. Como este número de operadores vem crescendo muito ao longo dos últimos anos, obter generalizações para estas derivadas fracionárias faz com que não seja necessário fazer uma escolha do operador de diferenciação a priori. Uma possível aplicação da derivada generalizada é estudar modelos envolvendo tranferência de calor a fim de comparar com a derivada de Caputo [17]. Discutimos, neste trabalho, generalizações para derivadas fracionárias bem estabelecidas na literatura. Apresentamos, também, um problema de Cauchy cuja solução é dada em termos da nova função k-Mittag-Leffler. Uma continuação deste trabalho consiste em generalizar a integral (k,ρ)-fracionária através da inserção de uma função k-Mittag-Leffler em seu núcleo.

Referências

[1] E. Capelas de Oliveira. *Funções Especiais com Aplicações.* Editora Livraria da Física, segunda edição, São Paulo, 2012.

[2] E. Contharteze Grigoletto, E. Capelas de Oliveira and R. F. Camargo. Linear fractional differential equations and eigenfunctions of fractional differential operator, *Comp. Appl. Math.*, 1–15, 2016. DOI: 10.1007/s40314-016-0381-1.

[3] R. Díaz and E. Pariguan. On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol, *Divulg. Mat.*, vol. 15, 179–192, 2007.

[4] G. A. Dorrego and R. A. Cerutti. The k-Mittag-Leffler function, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 7, 705–716, 2012.

[5] R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira. *Cálculo Fracionário*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015.

[6] A. Gupta and C. L. Parihar. k-new generalized Mittag-Leffler function, *J. Frac. Calc. Appl.*, vol.5, 165–176, 2014.

[7] H. Jafari and S. Momani. Solving fractional diffusion and wave equations by modified homotopy perturbation method, *Phys. Lett. A*, vol. 370, 388–396, 2007. DOI: 10.1016/j.physleta.2007.05.118.

[8] F. Jarad, T. Abdeljawad, and D. Baleanu. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Diff. Equ.*, vol. 2012, 1–8, 2012. DOI: 10.1186/1687-1847-2012-142.

[9] U. N. Katugampola. New approach to a generalized fractional integral, *App. Math. Comput.*, vol. 218, 860–865, 2011. DOI: 10.1016/j.amc.2011.03.062.

[10] U. N. Katugampola. A new approach to generalized fractional derivatives, *Bull. Math. Anal. Appl.*, vol. 6, 1–15, 2014.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of the Fractional Differential Equations*. Vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[12] S. Mubeen and A. Rehman. A note on k-gamma function and Pochhammer k-symbol, *J. Inf. Math. Sciences*, vol. 6, 93–107, 2014.

[13] D. S. Oliveira, Fractional Derivatives: Generalizations, Tese de Doutorado, Unicamp, 2018.

[14] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira. Hilfer-Katugampola fractional derivative (published online), *Comp. Appl. Math.*, 2017. DOI: 10.1007/s40314-017-0536-8.

[15] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira. On a Caputo-type fractional derivative (published online), *Adv. Pure Appl. Math.*, 2018. DOI: 10.1515/apam-2017-0068.

[16] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira. On the generalized (k, ρ)-fractional derivative, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 4:133-145. 2018. DOI: 10.18576/pfda/040207.

[17] D. S. Oliveira e E. Capelas de Oliveira. Modelos envolvendo transferência de calor via derivada fracionária generalizada. *Em preparação*, 2018.

[18] M. Z. Sarikaya, Z. Dahmani, M. E. Kiris and F. Ahmad. (k, s)-Riemann-Liouville fractional integral and applications, *Hacet. J. Math. Stat.*, vol. 45, 77–89, 2016.

