Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Solução Numérica para PVIF com Parâmetro Fuzzy Interativo: Aplicação em Modelos Epidemiológicos do Tipo SI

Vinícius F. Wasques[1]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP
Estevão Esmi[2]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP
Laécio C. Barros[3]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

Resumo. Nesse trabalho propomos uma solução numérica para um PVI fuzzy considerando condições iniciais reais e parâmetro fuzzy interativo. Em particular, tomamos um modelo epidemiológico do tipo suscetível-infectado. As equações diferenciais envolvidas são processos fuzzy autocorrelacionados. A solução numérica é baseada no método de Euler com operações adaptadas para números fuzzy interativos. Por fim, apresentamos uma breve discussão sobre o diâmetro da solução numérica fornecida.

Palavras-chave. Problema de Valor Inicial Fuzzy, Interatividade Fuzzy, Distribuição de Possibilidade Conjunta, Epidemiologia.

1 Introdução

O estudo matemático de epidemias desempenha um papel importante para o entendimento da evolução de doenças, fazendo com que políticas públicas em relação ao controle da mesma possam ser aplicadas. Em geral, esse estudo é realizado através de equações diferenciais ordinárias (EDO) ou parciais (EDP). Um dos modelos que é frequentemente estudado em epidemiologia é do tipo suscetível-infectado, ou também conhecido como modelo SI [5].

Os modelos clássicos não levam em conta incertezas presentes na evolução da doença. Por exemplo, no modelo SI o indivíduo suscetível que contrai uma doença se torna infectado e não apresenta recuperação em relação à doença, como ocorre com o HIV-AIDS. Nesse caso, o indivíduo que contrai o vírus HIV não necessariamente desenvolve a doença, no entanto, pode transmitir o vírus para outros indivíduos. Essa transmissão pode depender de uma série de fatores, dentre elas a carga viral que o indivíduo possui que não

[1]vwasques@outlook.com
[2]eelaureano@gmail.com
[3]laeciocb@ime.unicamp.br

é precisamente determinada. Portanto, a taxa de contágio (ou também chamada de taxa de infecção) é incerta.

No presente trabalho, vamos considerar o seguinte modelo do tipo SI [5]

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI & , S(0) = S_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI & , I(0) = I_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1.1}$$

sendo S_0 e I_0 condições iniciais e β a taxa de infecção.

Em [3] essa heterogeneidade, presente na taxa de contágio, foi incorporada ao modelo considerando que o parâmetro β é dado por um número fuzzy. Aqui, vamos supor que a taxa de infecção também depende da interatividade entre as populações S e I, sendo assim o parâmetro β é dado por um número fuzzy interativo. A noção de interatividade, no contexto da teoria fuzzy, está associada ao conceito de distribuição de possibilidade conjunta [7].

Nesse artigo, apresentamos uma solução numérica para o sistema (1.1), baseada no método proposto em [9], que consiste em estender as operações presentes no método de Euler para números fuzzy interativos, via princípio de extensão *sup*-J, sendo J uma distribuição de possibilidade conjunta. Em [9] é utilizada uma família de distribuições parametrizadas J_γ, com $\gamma \in [0,1]$. Vamos considerar apenas a conjunta J_0, uma vez que as operações aritméticas baseadas nessa distribuição apresentam o menor diâmetro possível dentre as demais [6, 8].

2 Preliminares

Essa seção está dividida em duas subseções. Na subseção 2.1 descrevemos o método de Euler clássico. Na subseção 2.2 apresentamos alguns conceitos básicos da teoria fuzzy.

2.1 Método de Euler

Sejam $y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, com $i = 1, ..., n$, funções que dependem do tempo t. Considere o problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem, dada em (2.2)

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \ i = 1, ..., n, \tag{2.2}$$

sendo f_i uma função que depende de $y_1, y_2, ..., y_n$ e t.

O método de Euler consiste em determinar soluções numéricas para equações diferenciais ordinárias descritas por (2.2). O algoritmo de tal método é dado em (2.3)

$$y_i^{k+1} = y_i^k + hf_i(t_k, y_1^k, ..., y_n^k), \tag{2.3}$$

com $0 \leq k \leq N-1$, sendo N o número de partições que o intervalo de tempo é dividido, h o tamanho dos subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ e condição inicial (t_0, y_i^0).

2.2 Teoria de conjuntos fuzzy

Um subconjunto fuzzy A de um universo X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : X \to [0,1]$ em que $\mu_A(x)$, ou simplesmente $A(x)$, indica o grau com que $x \in X$ pertence a A. Todo subconjunto clássico A em X pode ser descrito através de sua função característica $\chi_A : X \to \{0,1\}$. Sendo assim todo conjunto clássico é em particular um conjunto fuzzy. Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a família de todos os subconjuntos fuzzy de X.

Seja A um subconjunto fuzzy de X. Para cada $\alpha \in (0,1]$, os $\alpha-$níveis de A são definidos pelos conjuntos clássicos $[A]^\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$. Se X for um espaço topológico então o $0-$nível é dado por $[A]^0 = \overline{suppA}$, sendo $suppA = \{x \in X : A(x) > 0\}$ o suporte do conjunto fuzzy A.

Os números fuzzy são subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$ cujos $\alpha-$níveis são intervalos limitados, fechados e não vazios para todo $\alpha \in [0,1]$, e são denotados por $[A]^\alpha = [a^-_\alpha, a^+_\alpha]$, $\forall \alpha \in [0,1]$ [1]. Os números fuzzy triangulares são exemplos de números fuzzy e são denotados por $(a;b;c)$ com $a \leq b \leq c$ [1]. Denotamos a classe dos números fuzzy por $\mathbb{R}_\mathcal{F}$.

Uma t-norma é um operador $\triangle : [0,1]^2 \to [0,1]$ associativo, comutativo e crescente, que satisfaz $\triangle(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$. O operador mínimo ($\wedge$) é um exemplo de t-norma.

Sejam A e B números fuzzy. A distância de Pompeiu-Hausdorff $D_\infty : \mathbb{R}_\mathcal{F} \times \mathbb{R}_\mathcal{F} \to [0,+\infty)$ é dada por $D_\infty(A,B) = \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} (\max\{|a^-_\alpha - b^-_\alpha|, |a^+_\alpha - b^+_\alpha|\})$, $\forall A, B \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$. A norma de um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ é definida por $||A||_\mathcal{F} = D_\infty(A,0) = \max\{|a^-_0|, |a^+_0|\}$, onde o símbolo 0 representa a função característica do número real 0.

Uma relação fuzzy R em $X = X_1 \times ... \times X_n$ é dada pela função de pertinência $R : X_1 \times ... \times X_n \to [0,1]$, sendo $R(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]$ o grau em que os elementos da n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ estão relacionados segundo a relação R.

A projeção de uma relação fuzzy n-ária $R \in \mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)$ sobre X_i, com $1 \leq i \leq n$, é o conjunto fuzzy Π^i_R de X_i cuja função de pertinência é dada por $\Pi^i_R(y) = \sup\limits_{x \in X : x_i = y} R(x_1, ..., x_n)$, $\forall y \in X_i$. Por definição, temos que $\sup \emptyset = 0$.

Uma relação fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é dita uma distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ se $A_i(y) = \Pi^i_J(y) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i = y} J(x_1, ..., x_n)$, para todo $y \in \mathbb{R}$ e $\forall i = 1, ..., n$.

Seja $\triangle$ uma t-norma. A relação fuzzy $J_\triangle \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ dada por $J_\triangle(x_1, ..., x_n) = A_1(x_1) \triangle \ldots \triangle A_n(x_n)$, é dita distribuição de possibilidade conjunta baseada na t-norma $\triangle$ dos números fuzzy $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$. Através dessa definição, obtemos uma classe de distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ baseada em t-normas. *Em particular, se a distribuição de possibilidade conjunta J for baseada na t-norma do mínimo, ou seja,*

$$J_\wedge(x_1, ..., x_n) = A_1(x_1) \wedge ... \wedge A_n(x_n), \tag{2.4}$$

então os números fuzzy $A_1, ..., A_n$ são ditos não interativos. Caso contrário, isto é, $J \neq J_\wedge$, então $A_1, ..., A_n$ são ditos interativos.

Sendo assim, o conceito de interatividade entre números fuzzy está diretamente associada a noção de distribuição de possibilidade conjunta.

Em geral, a interatividade entre números fuzzy não precisa ser baseada em uma t-norma. Por exemplo, Carlsson *et al.* [4] introduziram o conceito de correlação linear entre números fuzzy. Dois números fuzzy A e B são ditos completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$, tal que a correspondente distribuição de possibilidade conjunta $J_{\{q,r\}}$ é dada por

$$\begin{aligned} J_{\{q,r\}}(x_1, x_2) &= A(x_1)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \\ &= B(x_2)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \end{aligned}, \tag{2.5}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sendo $\chi_{\{qu+r=v\}}$ a função característica do conjunto $\{(u, qu + r) : \forall u \in \mathbb{R}\}$. Quando $q > 0$ $(q < 0)$, dizemos que os números fuzzy A e B são positivamente (negativamente) correlacionados.

A distribuição $J_{\{q,r\}}$ só pode ser aplicada em pares de números fuzzy que possuem o mesmo tipo de função de pertinência (triangular, trapezoidal, gaussiana, etc) [1].

A seguir, apresentamos uma conjunta mais abrangente, no sentido de que pode ser aplicada para quaisquer tipos de números fuzzy.

Dados $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, para cada $z \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$ considere as funções [6]

$$g_1(z, \alpha) = \bigwedge_{w \in [A_2]^\alpha} |w + z| \qquad \text{e} \qquad g_2(z, \alpha) = \bigwedge_{w \in [A_1]^\alpha} |w + z|. \tag{2.6}$$

Considere também os conjuntos R^i_α e $L^i(z, \alpha)$ definidos por

$$R^i_\alpha = \begin{cases} \{a^-_{i_\alpha}, a^+_{i_\alpha}\} & \text{se } \alpha \in [0, 1) \\ [A_i]^1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad L^i(z, \alpha) = [A_{3-i}]^\alpha \cap [-g_i(z, \alpha) - z, g_i(z, \alpha) - z],$$

com $i = 1, 2$.

Definimos a distribuição de possibilidade conjunta J_0 através da seguinte função de pertinência [6]

$$J_0(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in P \\ 0 \qquad , & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.7}$$

onde

$$P = \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{\alpha \in [0,1]} P^i(\alpha) \quad \text{com} \quad P^i(\alpha) = \{(x_1, x_2) : x_i \in R^i_\alpha \text{ e } x_{3-i} \in L^i(x_i, \alpha)\}.$$

A definição a seguir, é uma generalização do princípio de extensão de Zadeh [10], que tem como objetivo estender funções reais para o domínio fuzzy.

Definição 2.1. *[7] Sejam $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta de $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A extensão sup-J da função f aplicada em $(A_1, ..., A_n)$ é definida por*

$$f_J(A_1, ..., A_n)(y) = \sup_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} J(x_1, ..., x_n),$$

sendo $f^{-1}(y) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, ..., x_n) = y\}$.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0326

Através da Definição 2.1, é possível obter uma aritmética entre números fuzzy interativos. Por exemplo, podemos definir a soma interativa entre A_1 e A_2 do seguinte modo: $(A_1 +_J A_2)(y) = \sup_{x_1+x_2=y} J(x_1, x_2)$, em que $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e J é uma distribuição de possibilidade conjunta de A_1 e A_2 arbitrária.

O método proposto em [9] considera conjuntas entre números fuzzy transladados, a fim de obter um controle em relação ao diâmetro das soluções numéricas. O conceito de translação de número fuzzy foi introduzido por Sussner *et al.* [8]. O número fuzzy A transladado por $c \in \mathbb{R}$, é o conjunto fuzzy $\tilde{A}$ definido por $\tilde{A}(x) = A(x + c)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ [8].

Aqui, utilizamos esse mesmo conceito apresentado em [8]. As notações $+_0$ e $*_0$ representam a soma e produto interativos, através da conjunta J_0, respectivamente. Na próxima seção fornecemos a solução numérica para (1.1) obtida por esse método.

3 Solução Numérica para PVIF com Parâmetro Fuzzy Interativo

A solução numérica proposta por esse método é dada por

$$\begin{cases} S^{k+1} = S^k +_0 (-h)(\beta *_0 (S^k *_0 I^k)) \\ I^{k+1} = I^k +_0 h(\beta *_0 (S^k *_0 I^k)) \end{cases}, \tag{3.8}$$

com condições iniciais S_0 e I_0 reais e parâmetro β dado por número fuzzy interativo.

É interessante notar que, como $\beta \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, o método de Euler adaptado produz a partir da primeira iteração números fuzzy interativos S^k e I^k, para $k \geq 1$.

A Figura 1 representa graficamente as soluções numéricas dadas em (3.8).

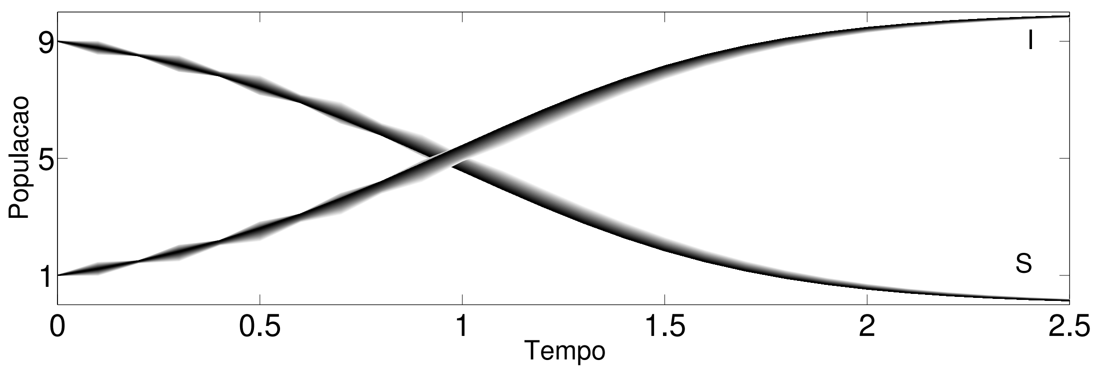

Figura 1: Solução numérica (3.8) para o sistema (1.1). Os parâmetros utilizados foram $S_0 = 9$, $I_0 = 1$, $\beta = (0; 0,25; 0,5)$ e $h = 0,1$. As curvas em tom de cinza representam os α-níveis das soluções numéricas. Os extremos dos α-níveis, com α variando de 0 a 1, são representadas respectivamente pelas curvas na escala cinza, variando de branco a preto.

Na Figura 1 é possível perceber que o diâmetro da solução numérica (3.8), para as populações de suscetíveis e infectados oscila no início das simulações (ver Figura 2), onde

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0326

o diâmetro em cada iteração k é calculado por $diam_k(S^k) = S_0^{k^+} - S_0^{k^-}$, para a população de suscetíveis e $diam_k(I^k) = I_0^{k^+} - I_0^{k^-}$, para a população de infectados. Vale ressaltar que na Figura 2 é mostrado apenas o diâmetro da população de infectados, isso porque para a população de suscetíveis o diâmetro é exatamente o mesmo, em cada iteração.

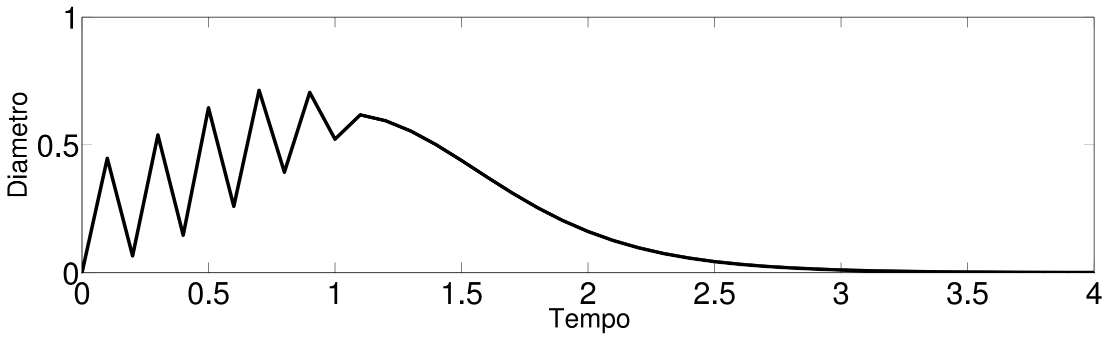

Figura 2: Diâmetro da solução numérica (3.8) para a população de infectados.

O comportamento das populações S e I, apontados na Figura 1, se dá pelo tipo de interatividade entre $-h(\beta *_0 (S^k *_0 I^k))$ e S^k, e $h(\beta *_0 (S^k *_0 I^k))$ e I^k. Em [2] é apresentado um estudo considerando intervalos negativamente correlacionados. Para o caso intervalar, a soma resulta ora em intervalo (quando o mesmo intervalo é somado uma quantidade ímpar de vezes), ora em um número real (quando é somado uma quantidade par de vezes). Do ponto de vista do diâmetro, também teríamos um comportamento oscilatório, apontando que no início das simulações os números fuzzy envolvidos sofrem um efeito parecido, o que indica que a interatividade assumida assemelha-se a correlação negativa entre os números fuzzy.

Esse comportamento não se mantém até o fim da simulação. Após o tempo $t = 1$ o diâmetro deixa de oscilar e começa a decair até assumir valores iguais a 0, como pode-se notar na Figura 2. Isso nos diz que ao longo do tempo a solução numérica (3.8) passa a ter um comportamento de uma curva determinística. Esse fato está associado à escolha da conjunta J_0 utilizada para estender as operações aritméticas segundo o princípio de extensão *sup*-J.

4 Conclusões

Nesse artigo consideramos um modelo epidemiológico do tipo SI considerando condições iniciais reais e parâmetro de infecção dado por um número fuzzy interativo. Apresentamos uma solução numérica baseada no método proposto em [9], que consiste em utilizar o método de Euler com operações adaptadas para números fuzzy interativos.

Fizemos uma breve análise do diâmetro das soluções produzidas por esse método. Constatamos que o diâmetro da solução oscila no início da simulação. Esse comportamento ocorre devido ao tipo de interatividade (similar a correlação completamente negativa como observado em [2]) presente entre os números fuzzy envolvidos. Ao longo do tempo o diâmetro da solução se estabiliza e decresce até atingir tamanho igual a 0. Desse modo, ao fim da simulação a solução numérica fuzzy apresenta uma comportamento de uma curva determinística.

Vale ressaltar que, modelamos o parâmetro β através de um número fuzzy triangular, no entanto, poderíamos ter tomado números fuzzy de outra forma, trapezoidal ou gaussiano, por exemplo, já que a distribuição J_0 pode ser aplicada para quaisquer tipos de números fuzzy.

Referências

[1] L. C. Barros, R. C. Bassanezi, and W. A. Lodwick. A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. In *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISSN: 1434-9922

[2] L. C. Barros, E. Esmi e W. A. Lodwick, Notas sobre Adição e Subtração Intervalar, *Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy - V CBSF*, 2018. (to appear).

[3] L. C. Barros, M. B. F. Leite and R. C. Bassanezi. The SI epidemiological models with a fuzzy transmission parameter, *Fuzzy Sets and Systems*, 45:1619–1628, 2003.

[4] C. Carlsson, R. Fullér, and P. Majlender. Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *Fuzzy Systems Proceedings IEEE International Conference on*, Budapest, Hungary, 2004.

[5] L. Edelstein-Keshet, Mathematical Models in Biology. *Random House*, New York, 1988.

[6] E. Esmi, P. Sussner, G. B. D. Ignácio and L. C. Barros. A parametrized sum of fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 331:85–104, 2018.

[7] R. Fuller and P. Majlender. On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 143:355–369, 2004.

[8] P. Sussner, E. Esmi, and L. C. Barros. Controling the Width of the Sum of Interactive Fuzzy Numbers with Applications to Fuzzy Initial Value Problems. In *Fuzzy Systems IEEE International Conference on*, Vancouver, British Columbia, Canada, 2016.

[9] V. F. Wasques, E. Esmi e L. C. Barros. Solução Numérica para PVI via aritmética fuzzy interativa:uma aplicação aos modelos epidemiológicos SI, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0435.

[10] L. A. Zadeh. Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, i, ii, iii. *Information Science*, 8:199–249 and 301–357, 1975.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0326