Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Solução por Mínimos Quadrados Utilizando a Janela CAS do GeoGebra

Daniel B. S. de Lima[1]
Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRN, Natal, RN
Tobias A. S. de Almeida [2]
Eulália C. Ribeiro [3]
Fabiana T. Santana[4]
Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN, Natal, RN

Sistemas de equações lineares é um importante tópico da Álgebra Linear e está presente na resolução de problemas práticos oriundos de observações e experimentos físicos. Porém, muitos desses problemas geram sistemas inconsistentes por lidarem com dados numéricos e estarem sujeitos à imprecisões.

A inconsistência do sistema $A\vec{x}=\vec{b}$, onde $W$ é o espaço gerado pelos vetores coluna de $A$, acontece quando $\vec{b}\notin W$. Neste caso, o processo de Mínimos Quadrados fornece a melhor solução aproximada ao substituir o vetor $\vec{b}$ por $proj_W\vec{b}\in W$, que é o vetor que mais se aproxima de $\vec{b}$ em $W$. A solução obtida para o sistema $A\vec{x}= proj_W\vec{b}$, agora consistente, é a melhor solução para $A\vec{x}=\vec{b}$. Como o vetor $\vec{b}-A\vec{x}$ ou $\vec{b}-proj_W\vec{b}$ é ortogonal à $W$ e, por sua vez, $W$ é o espaço coluna de $A$, o vetor $\vec{b}-A\vec{x}$ deve pertencer ao espaço nulo de $A^T$, satisfazendo $A^T(\vec{b}-A\vec{x})=\vec{0}$, isto é, $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$ [1].

Neste trabalho o processo de Mínimos Quadrados, via Álgebra Linear, foi utilizado para obter a melhor função horária do espaço $s(t) = s_0 + vt$ que ajusta o conjunto de dados $(1.12, 1), (0.95, 0.9), (0.88, 0.8), (0.84, 0.7), (0.82, 0.6), (0.63, 0.5), (0.37, 0.4)$ e $(0.25, 0.3)$ do tipo $(t, s(t))$, obtidos em um experimento físico que informava a posição de um corpo em relação ao tempo em uma trajetória retilínea uniforme.

A implementação do método foi feita na Janela CAS do GeoGebra, que é um aplicativo de Matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter em 2001 para ser utilizado em sala de aula. O aplicativo possui hoje uma comunidade mundial de usuários. As principais sintaxes e comandos deste software podem ser consultadas em [2,3]. Um dos objetivos deste trabalho é mostrar como o software GeoGebra pode ser agregado ao ensino universitário permitindo melhor compreensão e resolução de problemas, como o proposto acima.

Na Janela CAS do GeoGebra, começamos associando a cada par de dados $(t, s(t))$ o vetor $p_k := \{\{t\}, \{s(t)\}\}$, cujas coordenadas definirão as matrizes $A$ e $\vec{b}$ do sistema

[1] danielgts123@hotmail.com
[2] tobias_aguiar01@hotmail.com
[3] eulaliaribeiro_27@hotmail.com
[4] fabianasantana@ect.ufrn.br

$A\ \vec{x} = \vec{b}$, obtido substituindo os dados na equação $s(t) = s_0 + vt$. Na janela CAS, o comando $A := \{\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}, \cdots, \{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}\}\}$ define a matriz $A$ e seus termos são definidos pelo comando $Elemento[Elemento[M, linha], coluna]$.

Assim, $A := \{\{Elemento(p1, 1, 1), 1\}, \{Elemento(p2, 1, 1), 1\}, ..., \{Elemento(p8, 1, 1), 1\}\}$, onde a primeira coluna é composta pelos termos da primeira linha e primeira coluna dos vetores $p_k$ e a segunda coluna são os coeficientes unitários de $s_0$. Da mesma forma, $b := \{\{Elemento(p1, 2, 1)\}, \{Elemento(p2, 2, 1)\}, ..., \{Elemento(p8, 2, 1)\}\}$, obtida com os termos da segunda linha e primeira coluna dos vetores $p_k$. Por fim, o vetor de variáveis $\vec{x}$ foi definido por $x := \{\{v\}, \{s_0\}\}$.

Em seguida, $A^T A$ e $A^T\ \vec{b}$ foram definidas com os comandos $B := MatrizTransposta[A] * A$ e $D := MatrizTransposta[A] * b$, respectivamente. A matriz aumentada do sistema auxiliar $A^T A\ \vec{x} = A^T\ \vec{b}$ foi definida com o comando $M := \{\{Elemento(B, 1, 1), Elemento(B, 1, 2), Elemento(D, 1, 1)\}, \{Elemento(B, 2, 1), Elemento(B, 2, 2), Elemento(D, 2, 1)\}\}$ e sua respectiva matriz escalonada com $N := MatrizEscalonada(M)$. A solução $v = Elemento(N, 1, 3)$ e $s_0 = Elemento(N, 2, 3)$ definiu a função $s(t) = Elemento(N, 2, 3) + Elemento(N, 1, 3) * t$, correspondente a $s(t) = 0,7958x + 0,067$, como mostra a Figura 1.

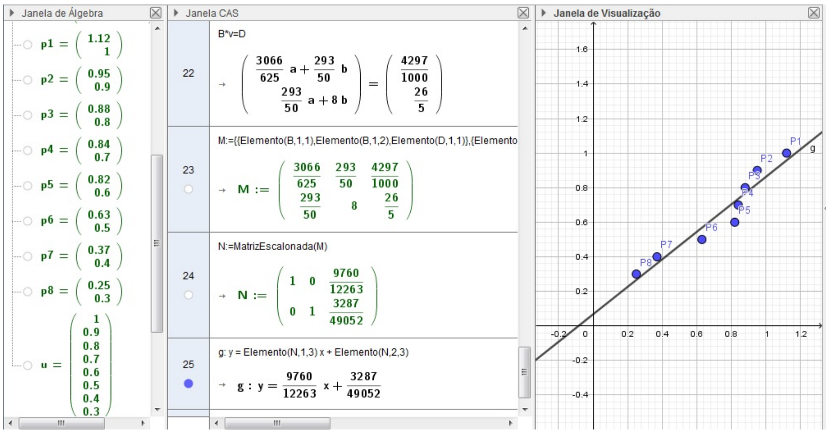


Figura 1: Função de ajuste de dados obtida no GeoGebra.

## Referências

[1] H. Anton, C. Rorres. *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Bookman, Porto Alegre, 2001.

[2] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter. Ajuda GeoGebra: manual oficial da versão 3.2. Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2017.

[3] D. Trindade, R. Gregório. Tutorial janela CAS. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/18235763/tutorial-janela-cas-geogebra>. Acesso em: 29 jul. de 2017.

 