

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

O Método dos Elementos de contorno com Integração Direta por funções de base radial na solução do problema de Laplace em meios suavemente não homogêneos

Hercules de Melo Barcelos<sup>1</sup>

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES  
Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, INMETRO, Duque de Caxias, RJ

Carlos Friedrich Loeffler<sup>2</sup>

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

João Paulo Barbosa<sup>3</sup>

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES  
Instituto Federal do Espírito Santo, IFES, São Mateus, ES

**Resumo.** Este artigo apresenta a modelagem e aplicação da técnica de Interpolação Direta do Método dos Elementos de Contorno com funções de base Radial (MECID) abordando problemas escalares governados pela Equação de Laplace em que o meio é suavemente não homogêneo, ou seja, as propriedades constitutivas são conhecidas e variam de acordo com uma função conhecida. Tais problemas interessam à sísmica de prospecção e também às análises da percolação em meios porosos [5]. Comumente os problemas dessa natureza são tratados por métodos que empregam discretização de domínio, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. Aqui, com o recurso da formulação MECID, pode-se transformar a integral de domínio referente a não homogeneidade do meio numa integral de contorno, aproveitando-se das facilidades operacionais daí advindas.

**Palavras-chave.** Problema de Laplace não homogêneo, Esquema de Regularização, Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta, Funções de Base Radial.

## 1 Introdução

As formulações clássicas do Método dos Elementos de Contorno utilizam equações integrais nas quais funções auxiliares chamadas de soluções fundamentais são utilizadas [3]. Estas funções são obtidas pela solução de problemas correlatos, nos quais uma fonte ou ação concentrada é aplicada num ponto específico de um domínio infinito ou semi-infinito. Contudo, muitos problemas de interesse prático são expressos por equações diferenciais

---

<sup>1</sup>engercules@gmail.com

<sup>2</sup>loefflercarlos@gmail.com

<sup>3</sup>joaopauloengmec@gmail.com.br

cujos operadores não são auto-adjuntos ou a sua integral inversa exige uma dedução complicada; tais dificuldades, aliadas aos problemas de custo no processamento computacional, tornam as formulações clássicas pouco atraentes.

Assim um esforço significativo tem sido despendido na obtenção de formulações do MEC mais flexíveis e também menos custosas. Boa parte deste esforço direciona-se ao desenvolvimento de formulações baseadas na utilização de aproximações com funções de base radial [4, 6, 7]. Uma das razões se refere ao fato de toda uma geração de métodos do tipo *meshless*, relacionados ao método dos elementos finitos tem demandado estudos sobre as mais diversas classes de funções dessa natureza. Nesse sentido, uma primeira grande contribuição veio com o desenvolvimento da formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR), proposta por [8]. Tal formulação tornou mais acessível a simulação de casos transientes, problemas de valores característicos, problemas de resposta dinâmica e problemas com a presença de fontes ou ações de domínio, usando uma solução fundamental mais simples. Apesar de bons resultados, o MECDR é exposto a certas imprecisões numéricas.

Neste trabalho, propôs-se uma aplicação inovadora da literatura baseada na busca de soluções de problemas postos em domínios heterogêneos, utilizando para isto as funções radiais em conjunto com o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) [1, 6]. O MECID não requer a construção de duas matrizes auxiliares multiplicando as matrizes clássicas de elementos limite H e G como ocorre na MECDR, o que reduz o custo computacional. Somente a transformação de uma integral de domínio em uma integral de contorno faz o MECID ser diferente de um procedimento de interpolação.

O procedimento MECID foi testado em problemas de Poisson e problemas de Helmholtz [1] apresentando sucesso. Ao contrário do MECDR, o núcleo da integral do domínio é interpolado, incluindo a solução fundamental; assim, a coincidência nas posições dos pontos de origem  $\xi$  e os pontos de campo X produziria uma singularidade, que é evitada com um procedimento de regularização [2].

Este trabalho mostra a aplicação do MECID para um problema de interesse, tanto na engenharia quanto na física matemática, onde casos em que o meio é heterogêneo [5], requerem uma estratégia particular para sua solução em termos de integrais de contorno.

## 2 Formulação Integral

Considere o caso em que atue um potencial escalar  $u(X)$  em meio heterogêneo, irrotacional e isotrópico, sem fontes e em regime estacionário. Neste caso, a equação de governo é dada por:

$$[K(X) u_{,i}(X)]_{,i} = 0. \quad (1)$$

Admitindo-se o meio representado por uma função isotrópica  $K(X)$ , onde  $X = X(x_1, x_2)$ , pode-se transformar a equação diferencial dada pela equação (1) numa forma integral inversa [3], ou seja:

$$c(\xi)K(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)[K(X)q^*(\xi; X)]d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)[K(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma(X) = \int_{\Omega} u(X)K_{,i}(X)u^*_{,i}(\xi; X)d\Omega(X). \quad (2)$$

Na equação (2),  $u^*$  é a solução fundamental e  $q^*$  é a sua derivada direcional normal, que se expressam por:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)]; \quad q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n(X)}. \quad (3)$$

Verifica-se que permanece apenas uma última integral de domínio na equação (2), que é devidamente operacionalizada segundo o procedimento MECID, mostrado a seguir.

### 3 Aplicação do procedimento MECID com regularização

Pela equação (2), pode-se observar que o termo do lado direito da igualdade corresponde a uma integral de domínio, com isto [6] propõe que:

$$[u(X) - u(\xi)]K_{,i}(X)u^*_{,i}(\xi; X) \approx F^j(X; X^j)\xi\alpha^j. \quad (4)$$

A equação (4) corresponde à interpolação do núcleo da integral de domínio regularizada [2], evitando estrategicamente a coincidência dos pontos base com os de campo. Desta maneira a equação (2) fica:

$$c(\xi)K(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)[K(X)q^*(\xi; X)]d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)[K(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma(X) = \xi\alpha^j \int_{\Omega} F^j(X; X^j)d\Omega(X) + \int_{\Omega} u(\xi)K_{,i}(X)u^*_{,i}(\xi; X)d\Omega(X). \quad (5)$$

A função de base radial  $F^j(X; X^j)$  utilizada neste trabalho será a conhecida função de placa fina [4, 7], sendo expressa por:

$$F^j(X; X^j) = r(X; X^j)\ln[r(X; X^j)]. \quad (6)$$

O argumento de qualquer função radial é composto pela distância euclidiana  $r(X; X^j)$ , que caracteriza as posições do ponto bases  $X^j$  com relação ao ponto campo  $X$  do domínio  $\Omega(X)$ . Durante a aplicação do MECID, utiliza-se uma função de interpolação primitiva  $\psi^j(X; X^j)$  relacionada à função  $F^j(X; X^j)$ , desta maneira a integral de domínio expressa pelo primeiro termo à direita da igualdade em equação (5) passa a ser desenvolvido conforme se segue:

$$\xi\alpha^j \int_{\Omega} F^j(X; X^j)d\Omega(X) = \xi\alpha^j \int_{\Omega} \psi^j_{,ii}(X; X^j)d\Omega(X) = \xi\alpha^j \int_{\Gamma} \psi^j_{,i}(X; X^j)n_i d\Gamma(X) =$$

$$\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X; X^j) d\Gamma(X). \tag{7}$$

Retornando à equação (5), o último termo do lado direito pode ser transformado numa integral de contorno, usando-se os recursos operacionais clássicos do MEC, o que resulta em:

$$u(\xi) \int_{\Omega} K_{,i}(X) u_{,i}^*(\xi; X) d\Omega(X) = u(\xi) \int_{\Gamma} K(X) u_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) d\Gamma(X) + c(\xi) K(\xi) u(\xi). \tag{8}$$

Substituindo as equações (7) e (8) na equação (5) e utilizando os procedimentos de discretização do MEC, em que são considerados n pontos fonte, entre valores internos e pontos nodais de contorno, chega-se a seguinte equação matricial (9), cujo detalhamento operacional pode ser colhido nas referências [1, 6].

$$\begin{bmatrix} H_{11..} & H_{1n} \\ \dots & \dots \\ H_{n1..} & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11..} & G_{1n} \\ \dots & \dots \\ G_{n1..} & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1.. & {}^1\alpha^m \\ \dots & \dots \\ {}^n\alpha^1.. & {}^n\alpha^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Sendo que  $Z_n$  vale:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^1 G_{11} + \dots + K^n G_{1n} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots & K^1 G_{n1} + \dots + K^n G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Já os coeficientes  $\xi \alpha^i$  são as incógnitas, obtidas através da solução do seguinte sistema de equações algébricas, em que a solução fundamental figura numa matriz diagonal  $\xi \Lambda$  característica para este problema:

$$[\xi \alpha] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [F] \alpha = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [u]. \tag{11}$$

Conforme a equação (11), para cada ponto fonte, demonstra-se que é possível alterar a ordem do produto matricial que aparece no lado direito da equação (10), explicitando u nos nós, de modo que:

$$A_{\xi} = [N_1 \quad \dots \quad N_m] \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 \\ \vdots \\ \xi \alpha_m \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Então, o valor de cada termo  $A_{\xi}$  pode ser explicitado em termos dos potenciais u(X) nos pontos nodais da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-S_2^1 \Lambda^2 \dots - S_n^1 \Lambda^n].. & S_n^1 \Lambda^n \\ \dots & \dots \\ S_1^n \Lambda^1 .. & [-S_1^n \Lambda^1 \dots - S_{n-1}^n \Lambda^{n-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Logo o sistema matricial final para a solução do problema de Laplace não homogêneo pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ G_{n1} & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ W_{n1} & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}. \quad (14)$$

#### 4 Exemplo de Simulação Numérica:

Considere o problema apresentado na figura (1), que pode ser interpretado fisicamente como uma barra engastada em  $x=0$  e derivada direcional do potencial não nula, prescrita em  $x=L$ . Tal problema é modelado conforme a equação (1) e sua propriedade constitutiva vale:

$$K_{x_1, x_2} = K_0 + K_0 \frac{mx_1}{L}. \quad (15)$$

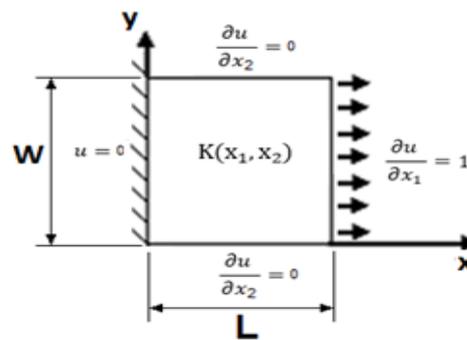


Figura 1: Região de geometria quadrada e suas condições de contorno para o exemplo 1

Na equação (15),  $K_0$  representa o módulo de Young,  $m$  o coeficiente de rigidez,  $L$  o comprimento e  $W$  a largura com ambos valendo 1. O valor da solução analítica para este modelo proposto vale:

$$u_{(x_1, x_2)} = \frac{L(1+m)}{m} \ln \left[ \frac{L+mx_1}{L} \right]. \quad (16)$$

Define-se o erro global conforme a equação (18). As derivadas normais na direção  $x_2$  são nulas (figura (1)), mas não a derivada na direção  $x_1$  (vide equação(17)).

$$\frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{L(1+m)}{L}. \quad (17)$$

$$e_g \% = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{analit - num}{analit} \right|_i. \quad (18)$$

Todo o potencial é medido em  $x_1 > 0$  e a derivada em  $x_1 = 0$ , onde apresentou-se bons resultados do potencial no contorno e sua derivada na figura (2), destacando-se a combinação entre o refinamento do contorno e pontos internos para a boa precisão.

Na figura (3) têm-se (A) onde são apresentados os valores de potencial interno, e (B) apresentando uma malha mais refinada, contendo 640 elementos de contorno e 400 pontos internos, aqui o gradiente do potencial é elevado aumentando  $m$  (vide equação (17)).

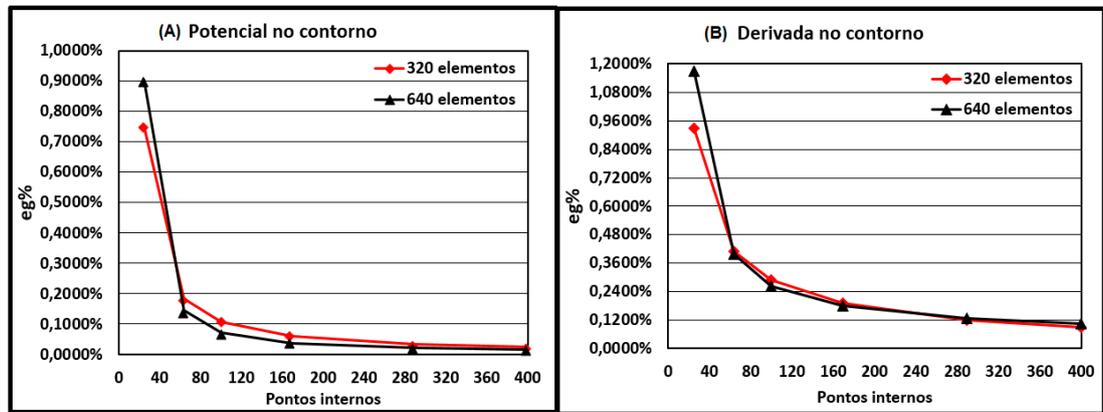


Figura 2: (A)Potencial no contorno para  $x > 0$  e (B) Derivada em  $x = 0$

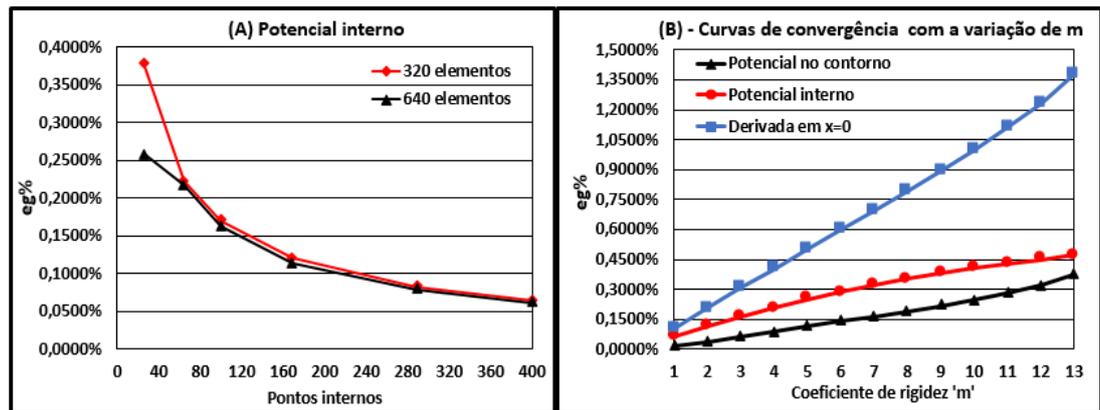


Figura 3: (A)Potencial no interior e (B) Erro medido na malha com 640 elementos, 400 pontos internos e valores crescentes de  $m$

## 5 Conclusões

A formulação MECID tem demonstrado um desempenho bastante satisfatório, tanto em problemas escalares com fontes ou ações de domínio quanto para casos onde se procuram obter valores de frequências naturais, além das respostas no domínio da frequência [1, 6, 7]. Neste trabalho, onde apresentaram-se os resultados iniciais da aplicação da formulação em problemas estacionários e suavemente não homogêneos, a MECID repetiu seu bom desempenho, entregando resultados animadores além de mostrar-se de fácil implementação computacional.

A simplicidade do modelo matemático expresso pela MECID contrasta com outras formulações do Método dos Elementos de Contorno. A solução fundamental utilizada é elementar - pois é a solução fundamental relacionada ao problema de Laplace com meio completamente homogêneo - e o tratamento da não homogeneidade pode ser feito de modo acessível através de um procedimento de interpolação, no qual se ressalta o uso de uma função primitiva que permite a transformação da integral de domínio numa integral de contorno. As possíveis singularidades que ocorreriam no processo de interpolação pela coincidência de localização entre os pontos interpolantes, os pontos fonte e os pontos campo [3,8] foram eliminadas pelo processo de regularização. Vale destacar que é de praxe todos estes pontos se posicionarem nos nós geométricos, situados nas extremidades dos elementos de contorno lineares aqui utilizados, para economia de processamento computacional.

Esta nova aplicação do MECID confirmou o já observado previamente em outras análises onde o refinamento do contorno é importante, mas é preciso se fazer acompanhar de pontos interpolantes no interior para que se garanta a precisão e a convergência monotônica das curvas de erro. Salienta-se ainda que a distribuição dos pontos internos deva ser feita o mais homoganeamente possível, para garantir os melhores resultados.

## Referências

- [1] H. M. Barcelos, Comparação e desempenho entre a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno com funções radiais e o Método dos Elementos Finitos em problemas de Poisson e Helmholtz, Dissertação de Mestrado, UFES, 2014.
- [2] C. L. R. Braga. *Notas de física-matemática: equações diferenciais, funções de Green e distribuições*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [3] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [4] M.D. Buhmann. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge Press, New York, 2003.
- [5] H. P. Caputo. *Mecânica dos solos e suas aplicações*. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] C. F. Loeffler, H. M. Barcelos, W.J. Mansur, and A. Bulcão. , Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 61:218-225, 2015.
- [7] C. F. Loeffler, L. Zamprogno, W. J. Mansur, and A. Bulcão, Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems, *Computational Methods and Engineering and Sciences*, 1:1-20, 2016. ISSN: 1526:1492
- [8] P. W. Partridge, C.A. Brebbia, and L.C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.