

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Métodos de Galerkin Descontínuo de Mais Alta Ordem para Leis de Conservação Hiperbólicas

Felipe Augusto Guedes da Silva<sup>1</sup>Eduardo Abreu<sup>2</sup>Maicon R. Correa<sup>3</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP

**Resumo.** O foco do presente trabalho consiste no estudo e na proposição de métodos de Galerkin Descontínuo para a aproximação numérica de problemas diferenciais de natureza hiperbólica, lineares e não-lineares bidimensionais, com enfoque em esquemas explícitos e no uso de aproximações do tipo Runge-Kutta no tempo. Especificamente, serão exploradas as boas propriedades de estabilidade local no tempo dos métodos da classe Runge-Kutta em conjunto com funções de fluxo numérico estáveis e o uso da técnica de reconstrução do gradiente, com o objetivo de desenvolver métodos de Galerkin Descontínuo de mais alta ordem capazes de obter boa resolução de gradientes abruptos e de soluções descontínuas, sem oscilações espúrias, em problemas hiperbólicos.

**Palavras-chave.** Problemas hiperbólicos, Galerkin Descontínuo, Formulação semi-discreta, Runge-Kutta, Reconstrução do gradiente.

## 1 Método de Galerkin Descontínuo

O método de Galerkin Descontínuo (DG, do inglês *Discontinuous Galerkin*) é uma classe dos Métodos de Elementos Finitos cuja formulação variacional permite o emprego de polinômios descontínuos por partes para compor os espaços de aproximação. O método DG combina diversas características interessantes do método de elementos finitos clássico e do método de volumes finitos, compondo uma ferramenta importante para aproximar soluções de equações diferenciais, como por exemplo, em problemas de escoamentos em meios porosos, de dinâmica de fluidos e eletrodinâmica [1].

### 1.1 Lei de Conservação Hiperbólica

Seja  $D = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^3$ , o domínio de definição do problema estudado, onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $I = [0, T]$  com  $T > 0$ , correspondendo as partes espacial e temporal de  $D$ , respectivamente. Sem perda de generalidade,  $\mathbf{x} = (x, y)^t$  denotará a variável espacial e  $t$  a variável temporal. Considere  $u(\mathbf{x}, t) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função que designa a variável conservada e a função de fluxo

---

<sup>1</sup>felipe.augusto.guedes@gmail.com

<sup>2</sup>eabreu@ime.unicamp.br

<sup>3</sup>maicon@ime.unicamp.br

$\mathbf{f}(u) = (f(u), g(u))$  ambas com imagem em  $\mathbb{R}^2$  e as componentes de  $\mathbf{f}(u)$ ,  $f(u)$  e  $g(u)$  ambas com imagem em  $\mathbb{R}$ . Uma lei de conservação associada a essas funções é uma equação diferencial parcial escrita na forma

$$u(\mathbf{x}, t)_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(u(\mathbf{x}, t)))_{\mathbf{x}} = 0. \tag{1}$$

A equação (1) deverá ser acrescida de uma condição inicial e uma condição de contorno (em domínios limitados), definindo assim um problema de valor inicial e de contorno.

### 1.2 Nomenclatura e Definições para Problemas Discretos

Seja  $\Omega_h$  uma partição fixa do domínio  $\Omega$  em quadriláteros. Consideramos um sub-conjunto  $E_j \subset \Omega_h$  como sendo um elemento de  $\Omega_h$ , com  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Tomando um elemento arbitrário  $E$  em  $\Omega_h$ , definimos  $V_h(\Omega_h, \mathbb{R})$  como sendo:

$$V_h(\Omega_h, \mathbb{R}) = \{v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R}) : v(\mathbf{x})|_E \in V_h(E, \mathbb{R}), \forall E \in \Omega_h\},$$

com  $V_h(E, \mathbb{R}) = P^1(E, \mathbb{R})$ . Seja também  $\hat{f}(a, b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , o qual iremos nos referir por *fluxo numérico*. O fluxo numérico é consistente com o fluxo físico, ou seja,  $\hat{f}(a, a) = \mathbf{f}(a) \cdot \mathbf{n}_{e,E}$ , onde  $\mathbf{n}_{e,E}$  denota o vetor normal a aresta  $e$  do elemento  $E$ . Além disso,  $\hat{f}(a, b)$  é monótono e Lipschitz contínuo em ambos os argumentos. Para um dado instante de tempo  $t$  fixo e dada  $u_h(\mathbf{x}, t) \in V_h(E, \mathbb{R})$  arbitrária, dados  $\mathbf{x} \in \Omega_h$  e  $\mathbf{y} \in E$ , definimos os seguintes valores:

$$u_h(\mathbf{x}^-) \equiv u_h(\mathbf{x}^-, t) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in E} u_h(\mathbf{y}, t) \text{ e } u_h(\mathbf{x}^+) \equiv u_h(\mathbf{x}^+, t) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \notin E} u_h(\mathbf{y}, t).$$

### 1.3 Formulação Variacional Fraca Global

Tomando uma função arbitrária  $v(\mathbf{x}) \in V_h(\Omega_h, \mathbb{R})$  multiplicamos (1) por esta função e integramos com relação a variável espacial no domínio  $\Omega_h$  e utilizando o Teorema de Green para integração de funções de múltiplas variáveis temos que:

$$\sum_{l=1}^M \frac{d}{dt} \int_{E_l} u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) \, d\Omega = \sum_{l=1}^M \int_{E_l} \mathbf{f}(u(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\Omega - \sum_{l=1}^M \sum_{e \in \partial E_l} \int_e \mathbf{f}(u(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,E_l} v(\mathbf{x}) \, d\tau. \tag{2}$$

### 1.4 Solução Local

A construção da solução local é baseada em [1], onde a ideia básica é a hipótese de separação de variáveis. Considerando um elemento arbitrário  $E \subset \Omega_h$  temos que  $V_h(E, \mathbb{R}) = P^1(E, \mathbb{R})$  é o espaço das funções espaciais, gerado pelas funções  $\varphi_1^E(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\varphi_2^E(\mathbf{x}) = x - x_E$  e  $\varphi_3^E(\mathbf{x}) = y - y_E$ , onde o vetor  $\mathbf{x}_E = (x_E, y_E)^t$  contém as coordenadas do baricentro do elemento  $E$ . Fixada a base  $V_h(E, \mathbb{R})$  tomamos coeficientes dependentes do tempo  $t$ , denotados por  $c_i^E(t)$ , indicando que cada coeficiente esta associado a uma função de base  $\varphi_i^E(\mathbf{x})$ . Assim, a *solução local* do elemento  $E$  é dada por:

$$u_h(\mathbf{x}, t)|_E = \sum_{i=1}^3 c_i^E(t) \varphi_i^E(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E. \tag{3}$$

### 1.5 Formulação Variacional Fraca Local

Para determinarmos uma aproximação  $u_h(\mathbf{x}, t) \in V(\Omega_h, \mathbb{R})$  de  $u(\mathbf{x}, t) \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R})$  em (1) vamos considerar a forma fraca dada em (2) restrita a um elemento arbitrário  $E$  e uma função teste arbitrária  $v(\mathbf{x}) \in V_h(\Omega_h, \mathbb{R})$ , tal que para todo  $E \in \Omega_h$  tenhamos:

$$\frac{d}{dt} \int_E u_h(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\Omega = \int_E \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\Omega - \sum_{e \in \partial E} \int_e \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,E} v(\mathbf{x}) d\tau. \quad (4)$$

A equação (4) é chamada de *formulação variacional local*. Introduzimos a função de fluxo numérico a qual que tem o papel de aproximar o termo  $\mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,E}$  em termo das quantidades  $u_h(\mathbf{x}^-)$  e  $u_h(\mathbf{x}^+)$  associadas ao elemento  $E$ , ou seja,

$$\widehat{\mathbf{f}}(u_h(\mathbf{x}^-), u_h(\mathbf{x}^+)) \approx \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,E},$$

onde  $u_h(\mathbf{x}^-)$  e  $u_h(\mathbf{x}^+)$  vão ser calculados de forma específica levando em consideração cada aresta  $e \in \partial E$ . Vamos utilizar o fluxo numérico Local Lax-Friedrichs dado por:

$$\widehat{\mathbf{f}}(a, b) = \frac{1}{2} (\mathbf{f}(a) + \mathbf{f}(b)) \cdot \mathbf{n}_{e,E} - \frac{\alpha_E}{2} (b - a),$$

onde  $\alpha_E$  é uma avaliação da maior velocidade de propagação, dada por:

$$\alpha_E = \max_{\min(a,b) \leq s \leq \max(a,b)} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(s) \cdot \mathbf{n}_{e,E} \right|,$$

com  $a = u_h(\mathbf{x}^+)$ ,  $b = u_h(\mathbf{x}^-)$  e  $s \in \mathbb{R}$ , onde derivada de  $\mathbf{f}(s)$  com relação a variável  $u$  é dada por:  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \left( \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \frac{\partial g(u)}{\partial u} \right)$ . Fixando um elemento  $E$ , vamos denotar  $u_h(\mathbf{x}, t)|_E$  simplesmente por  $u_h^E$ . Substituindo a expressão da solução local  $u_h^E$ , do fluxo numérico e como esta formulação é válida para qualquer  $v_h(\mathbf{x}) \in V_h(\Omega_h, \mathbb{R})$ , onde  $V_h(E, \mathbb{R})$  tem dimensão 3, logo a equação (4) é válida para qualquer elemento da base  $V_h(E, \mathbb{R})$ . Assim vamos fixar um elemento  $\varphi_l^E(\mathbf{x})$  para algum  $l = 1, 2$  ou  $3$ . Notando que os termos  $c_i^E(t)$  não dependem das variáveis espaciais, eles são constantes com relação as integrações nas variáveis espaciais, assim reescrevemos (4) como:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d c_i^E(t)}{d t} \int_E \varphi_i^E(\mathbf{x}) \varphi_l^E(\mathbf{x}) d\Omega = \int_E \mathbf{f}(u_h^E) \cdot \nabla \varphi_l^E(\mathbf{x}) d\Omega - \sum_{e \in \partial E} \int_e \widehat{\mathbf{f}}(u_h^E(\mathbf{x}^-), u_h^E(\mathbf{x}^+)) \varphi_l^E(\mathbf{x}) d\tau, \quad (5)$$

com  $l = 1, 2$  e  $3$ . Podemos reescrever (5) em termos de um sistema de equações diferenciais, para isso tomamos  $k_{total} = 3M$ , omitindo a dependência do tempo dos coeficientes  $c_i^E(t)$  definimos o vetor  $\mathcal{C} = [\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^M]^T$ , cuja as componentes de  $\mathcal{C}^j \in \mathbb{R}^3$  são dadas por  $\mathcal{C}^j = [\mathbf{c}_1^{E_j}, \mathbf{c}_2^{E_j}, \mathbf{c}_3^{E_j}]^T$ , com  $j = 1, 2, \dots, M$ . Seja a matriz  $\mathbf{B}^j \in M(\mathbb{R})_3$  cujo os elementos são dados por:

$$b_{pq}^j = \int_{E_j} \varphi_p^{E_j}(\mathbf{x}) \varphi_q^{E_j}(\mathbf{x}) d\Omega,$$

para  $p, q = 1, 2$  e  $3$ . A matriz  $\mathbf{B}^j \in M(\mathbb{R})_3$  é inversível pois suas entradas  $b_{pq}^j$  são produtos internos do espaço  $L^2(E_j, \mathbb{R})$  e não-nulos quando  $p = q$ . Além disso, definimos o vetor  $\mathcal{H}^j(\mathcal{C}) = [h_1^j(\mathcal{C}), h_2^j(\mathcal{C}), h_3^j(\mathcal{C})]^T$ , cujas as entradas  $h_p^j(\mathcal{C})$  são dadas por:

$$h_p^j(\mathcal{C}) = \int_{E_j} \mathbf{f}(u_h^{E_j}) \cdot \nabla \varphi_p^{E_j}(\mathbf{x}) \, d\Omega - \sum_{e \in \partial E_j} \int_e \widehat{\mathbf{f}}(u_h^{E_j}(\mathbf{x}^-), u_h^{E_j}(\mathbf{x}^+)) \varphi_p^{E_j}(\mathbf{x}) \, d\tau.$$

Como  $\mathbf{B}^j$  é inversível, então o sub-sistema de equações diferenciais assume a forma:

$$\frac{d\mathcal{C}^j}{dt} = (\mathbf{B}^j)^{-1} \mathcal{H}^j(\mathcal{C}).$$

O sistema global de equações diferenciais é definido da seguinte forma: definimos o vetor  $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = [\mathcal{H}^1(\mathcal{C}), \mathcal{H}^2(\mathcal{C}), \dots, \mathcal{H}^M(\mathcal{C})]^T$  e seja  $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \dots, \mathbf{B}^M)$ , com  $\mathbf{B} \in M(\mathbb{R})_{k_{total}}$ , uma matriz inversível de dimensão  $k_{total}$ , pois as componentes  $\mathbf{B}^j$  são inversíveis por construção. Deste modo o sistema de EDO's global pode ser escrito como:

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = (\mathbf{B})^{-1} \mathcal{H}(\mathcal{C}). \tag{6}$$

Vamos resolver o sistema de equações diferenciais (6) com um esquema da classe Strong Stability Preserving Runge-Kutta (SSPRK) de terceira ordem e três estágios [1].

## 2 Método DG Estabilizado

O método DG apresenta oscilações espúrias na presença de gradientes abruptos [1, 3], assim para conter tais oscilações propomos uma estratégia de estabilização baseada na técnica *Reconstrução do Gradiente* [2]. Seja  $\bar{u}_E$  a solução média no elemento  $E$  obtida a partir de (3) em um tempo fixo  $t^*$  dada por:

$$\bar{u}_E = \frac{1}{A_E} \int_E u_h(\mathbf{x}, t^*)|_E \, d\Omega,$$

onde  $A_E$  é a área do elemento  $E$ . Para estabilizar a solução  $u_h(\mathbf{x}, t^*)|_E$  via técnica de Reconstrução do Gradiente [2,3] os ingredientes principais são:  $N(E)$  é o conjunto formado pelos índices dos elementos vizinhos por aresta do elemento  $E$ , sendo que  $n(N(E))$  denota a quantidade de elementos no conjunto  $N(E)$ ;  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$  são as coordenadas do baricentro do  $i$ -ésimo vizinho do elemento  $E$ , com  $i \in N(E)$ ;  $\bar{u}_i$  é a média celular no  $i$ -ésimo vizinho do elemento  $E$ , com  $i \in N(E)$ . De posse do valor  $\bar{u}_E$ , então uma forma de reconstruir  $u_h(\mathbf{x}, t^*)|_E$  é utilizar a seguinte função polinomial:

$$p_E(\mathbf{x}) = \bar{u}_E + \beta_E \mathbf{g}_E \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E), \tag{7}$$

onde  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_E \in E$  e  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_E = (x - x_E, y - y_E)^t$ . Note que em (7) temos elementos que compõem a geometria de  $E$  e dois graus de liberdade que são as componentes do vetor de inclinações  $\mathbf{g}_E = (g_x, g_y)^t$ . O redutor de inclinação  $\beta_E$  é introduzido com objetivo de

reduzir oscilações espúrias que surgem no processo de estabilização de  $u_h(\mathbf{x}, t^*)|_E$ . Além disso, a reconstrução  $p_E(\mathbf{x})$  dada em (7) tem média nula em cada elemento  $E$  [2,3]. Para calcularmos as componentes de  $\mathbf{g}_E$  vamos assumir  $\beta_E = 1$  e tomando  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$  em (7), para cada  $i \in N(E)$ , obtemos:

$$\bar{u}_i - \bar{u}_E = \mathbf{g}_E \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_E). \tag{8}$$

Com a variação dos índices  $i \in N(E)$  a equação (8) caracteriza um sistema retangular com  $n(N(E))$  equações sobre as variáveis  $g_x$  e  $g_y$ . Geometricamente o sistema gerado por (8) pode ser interpretado como a busca pelos valores  $g_x$  e  $g_y$  que minimizam a diferença  $|p_E(\mathbf{x}_i) - \bar{u}_i|^2$ , para cada  $i \in N(E)$ . O sistema anterior com sua interpretação geométrica caracteriza um *Problema de Quadrados Mínimos*. Introduzimos o peso  $w_i$ , que penaliza a distância entre o baricentros vizinhos e o baricentro de  $E$ , dado por:

$$w_i = \frac{(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m\|_2)^{-c}}{\sum_{i=1}^{N(E)} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m\|_2)^{-c}},$$

onde  $\mathbf{x}_m$  é o vértice de  $E$  que tem menor distância ao baricentro  $\mathbf{x}_E$  de  $E$  com relação a norma euclidiana usual, denotada por  $\|\cdot\|_2$ . O valor  $c$  é um inteiro não-negativo que depende do diâmetro do elemento  $E$ , o qual fixaremos como  $c = 2$ . Ao introduzirmos o peso  $w_i$  obtemos um *Problema de Quadrados Mínimos Ponderado*. Para suprimir a notação sejam:  $\Delta x_i = x_i - x_E$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_E$  e  $\Delta \bar{u}_i = \bar{u}_i - \bar{u}_E$ . Logo o *Problema de Quadrados Mínimos Ponderado* é descrito por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \Delta x_1 & w_1 \Delta y_1 \\ w_2 \Delta x_2 & w_2 \Delta y_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_{N(E)} \Delta x_{N(E)} & w_{N(E)} \Delta y_{N(E)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \Delta \bar{u}_1 \\ w_2 \Delta \bar{u}_2 \\ \vdots \\ w_{N(E)} \Delta \bar{u}_{N(E)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Para aproximar  $g_x$  e  $g_y$  resolvemos o sistema (9) via *Equações Normais*. Para o cálculo do parâmetro  $\beta_E$  consideramos os valores:

$$\bar{u}_E^{min} = \min_{i \in N(E)} \{\bar{u}_i, \bar{u}_E\} \text{ e } \bar{u}_E^{max} = \max_{i \in N(E)} \{\bar{u}_i, \bar{u}_E\}$$

Como temos interesse no controle de inclinação analisando todos os elementos vizinhos escolhemos os pontos  $\mathbf{z}_i$  como sendo os baricentros dos elementos vizinhos de  $E$ . Introduzimos os valores  $\beta_E^l$  para cada vizinho  $l \in N(E)$  do elemento  $E$ , dados por:

$$\beta_E^l = \begin{cases} \min \left\{ 1, \frac{\bar{u}_E^{max} - \bar{u}_E}{p_E(\mathbf{z}_l) - \bar{u}_E} \right\}, & \text{se } p_E(\mathbf{z}_l) > \bar{u}_E, \\ \min \left\{ 1, \frac{\bar{u}_E^{min} - \bar{u}_E}{p_E(\mathbf{z}_l) - \bar{u}_E} \right\}, & \text{se } p_E(\mathbf{z}_l) < \bar{u}_E, \\ 1, & \text{se } p_E(\mathbf{z}_l) = \bar{u}_E. \end{cases}$$

Desta forma calculamos  $\beta_E$  como sendo:  $\beta_E = \min_{l \in N(E)} \{\beta_E^l\}$ . Por fim, atualizamos os coeficientes  $c_i^E(t^*)$  em (3) como:  $c_1^E(t^*) = \bar{u}_E$ ,  $c_2^E(t^*) = \beta_E g_x$  e  $c_3^E(t^*) = \beta_E g_y$ .

### 3 Experimentos Numéricos

Uma descrição das condições CFL para estas simulações pode ser encontrada em [1,3]. Iremos nos referir ao método DG com aproximações em  $P^1(E, \mathbb{R})$  como DGP1 e sua estabilização como DGP1R. Neste conjunto de testes, apresentamos soluções numéricas obtidas para o fluxo de Advecção Linear  $f(u) = (au, bu)^t$ , com  $a = b = 1.0$  e de Burgers não-viscosa  $f(u) = (u^2, u^2)^t$ . Iremos simular um problema de fronteira livre com a condição inicial do tipo “pulso” que é descrita por:

$$u_0(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1.0 & \text{se } 0.1 \leq x \leq 0.6 \text{ e } 0.1 \leq y \leq 0.6, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde o domínio  $\Omega_h = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $T = 0.3$ ,  $M = 400$  elementos e tomando o número de Courant como  $\nu = 0.3$ . Vamos simular em malhas quadrilaterais ortogonais e as aproximações das integrais são feitas com *Quadratura Gaussiana* com 5 pontos em cada uma das direções. Em termos de comparação, utilizamos o esquema proposto por Cockburn e colaboradores em [1], denotado por DGP1C. De forma geral, vemos que para os experimentos de Advecção Linear e Burgers não-viscosa com o método de estabilização baseado na técnica de Reconstrução do Gradiente tem bom comportamento, não gerando oscilações espúrias como visto na Figura 3. Note que DGP1R fornece resultados mais estáveis quando comparado a DGP1C, controlando todas as oscilações no caso de Burgers não-viscosa e com menos difusão em ambos os casos, como vemos quando comparamos as Figuras 2 e 3.

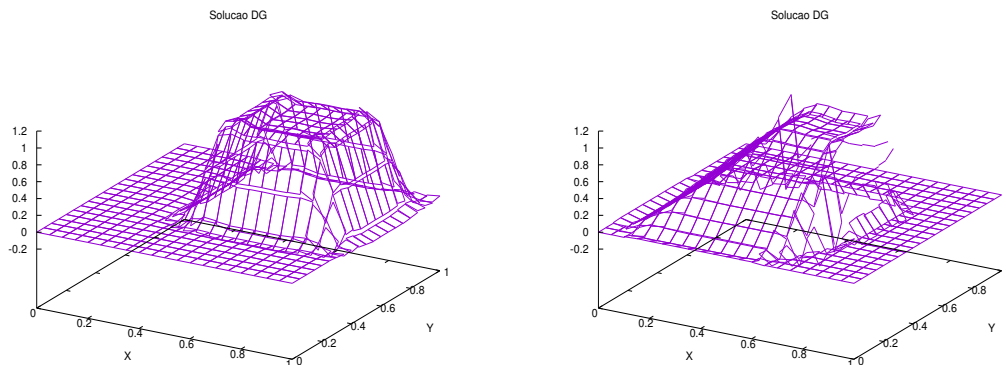


Figura 1: Soluções da Advecção Linear (á esquerda) e Burgers não-viscosa (á direita) com DGP1.

### 4 Conclusões

A utilização do método DG e de esquemas de evolução temporal da classe SSPRK combinados com elementos da técnica de Reconstrução do Gradiente fornecem bons resultados, controlando as oscilações espúrias decorrentes da utilização do método DG e reduzindo a difusão numérica.

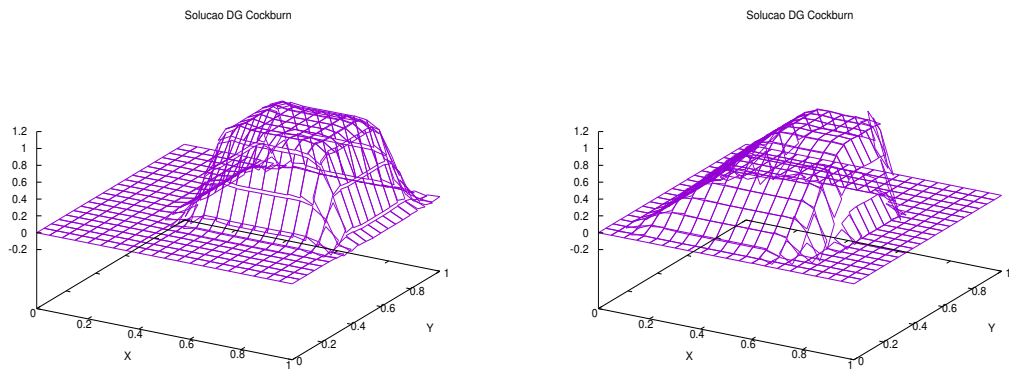


Figura 2: Soluções da Advecção Linear (á esquerda) e Burgers não-viscosa (á direita) com DGP1C.

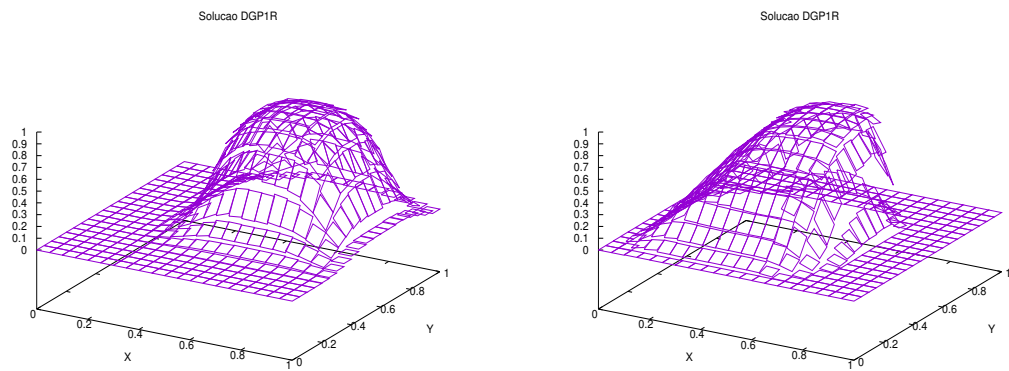


Figura 3: Soluções da Advecção Linear (á esquerda) e Burgers não-viscosa (á direita) com DGP1R.

## Agradecimentos

Agradecemos o apoio da CAPES e do CNPq, juntamente com o PPG em Matemática Aplicada e Computacional do IMECC/UNICAMP, pelo apoio via uma bolsa institucional de Doutorado CAPES no período de 08/2015 à 08/2016 e do CNPq no período de 09/2016 até o presente momento.

## Referências

- [1] B. Cockburn and C. Shu, The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, 141:199-224, 1998. DOI: 10.1006/jcph.1998.5892.
- [2] C. Michalak and C. Ollivier-Gooch, Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations, *Journal of Computational Physics*, 228:8693-8711, 2009. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.08.021.
- [3] F. A. G. Silva, Métodos de Galerkin Descontínuo de Mais Alta Ordem para Leis de Conservação Hiperbólicas, Tese de Doutorado (em andamento), Unicamp, 2018.