Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas

Rudimar Luiz Nós[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Flavia Mescko Fernandes[2]
Editora Positivo, Curitiba, PR

**Resumo**. Apresentamos neste trabalho o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e empregamos a equicomposição de polígonos para provar a área do trapézio convexo. Além disso, analisamos alguns livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2015 e em 2016 para avaliar o quanto a equicomposição de polígonos é explorada no cálculo de áreas. Observamos que todos os autores das obras analisadas abordam a equicomposição, muitos deles em atividades lúdico-manipulativas.

**Palavras-chave**. O teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, quadratura, isometrias, área do trapézio, a equicomposição de Perigal.

## 1 Introdução

O cálculo de áreas foi uma das necessidades mais antigas das civilizações. Talvez pelo fato do quadrado ser a figura mais simples, os antigos geômetras tentaram estudar a área de outras figuras, como a do círculo por exemplo, relacionando-as com o quadrado. Assim, a expressão "quadratura" era empregada no sentido de se determinar um quadrado com área igual à área da figura em estudo, ou seja, de se construir um quadrado equivalente à figura.

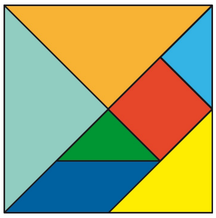
Sobre a quadratura, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC [13] diz o seguinte:

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau.

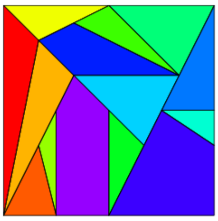
---

[1] rudimarnos@utfpr.edu.br
[2] flavia_m_f@yahoo.com.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272



(a)

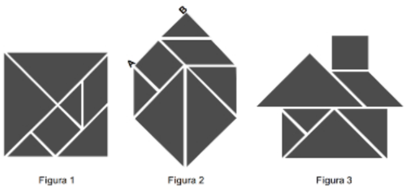


(b)

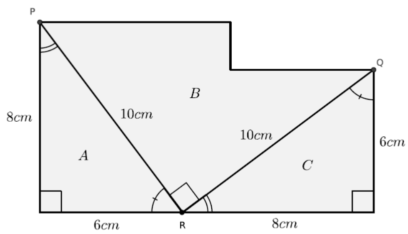
Figura 1: (a) Tangram - [5]; (b) *Stomachion* - [17].

Dois *puzzles* da antiguidade, o tangram e o *Stomachion* de Arquimedes, ilustrados na Figura 1, são dois bons exemplos do processo de quadratura. *Puzzle* é uma palavra inglesa usada para designar um enigma ou quebra-cabeça. O tangram é um quebra-cabeça chinês de sete peças poligonais que compõem um quadrado; o *Stomachion* de Arquimedes, um quebra-cabeça constituído de catorze peças poligonais que compõem um quadrado. Em ambos, o quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado constituído por todas as peças é um número racional [6, 17]. Todas as figuras formadas com as peças poligonais de cada um desses dois *puzzles* têm a mesma área e são equidecomponíveis, ou seja, têm a mesma decomposição. Essa relação pode ser generalizada, isto é, dois polígonos que têm a mesma área são sempre equidecomponíveis?

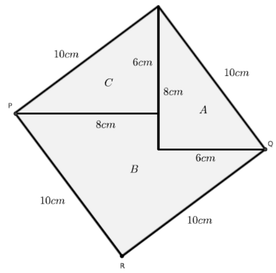
Para responder essa pergunta, abordamos a equicomposição apresentando o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. A equicomposição de polígonos é um tema pertinente à formação do professor de matemática da Educação Básica, uma vez que a BNCC enfatiza o uso da mesma e ela tem sido explorada em testes oficiais, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - Figura 2.




(a)




(b)




(c)

Figura 2: Equicomposição em testes: (a) ENEM 2008; (b) e (c) banco de questões da OBMEP 2016.

## 2 O teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

**Definição 2.1** (Polígonos equidecomponíveis). *Dois polígonos P e P' são equidecomponíveis quando existem decomposições* $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \ldots \cup P_i \cup \ldots \cup P_n$ *e* $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup \ldots \cup P'_i \cup \ldots \cup P'_n$*, de tal modo que cada polígono* $P_i$*,* $1 \leq i \leq n$*, é congruente ao polígono* $P'_i$*.*

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272  

Segundo Boltianski [3]:

> Duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras em um número finito de partes, e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura.

No rearranjo das peças, utilizamos duas isometrias no plano [10]: translações e rotações.

Para provar o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, precisamos utilizar a propriedade de transitividade da equicomposição [6] e demonstrar o Teorema 2.1 e os Lemas 2.1 e 2.2. Essas demonstrações podem ser encontradas em [3, 6, 8, 9, 11]. Provaremos inicialmente o Lema 2.3, o qual estabelece a equicomposição entre polígonos e retângulos.

**Teorema 2.1.** *Todo polígono de $n$ lados, $n \geq 4$, pode ser decomposto em $(n-2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono.*

**Lema 2.1.** *Todo triângulo é equicomposto a um retângulo.*

**Lema 2.2.** *Dois retângulos que têm áreas iguais são equicompostos.*

**Lema 2.3.** *Todo polígono é equicomposto a um retângulo.*

*Demonstração.* Segundo o Teorema 2.1, todo polígono pode ser decomposto em um número finito de triângulos. Cada um destes triângulos, conforme o Lema 2.1, é equicomposto a um retângulo. Mas, de acordo com o Lema 2.2, cada um desses retângulos é equicomposto a um retângulo de mesma área. Suponhamos então que $b$ seja a medida da base de cada um desses retângulos. Dessa forma, por transitividade, os triângulos $1, 2, 3, 4, 5, ...$ nos quais foi decomposto o polígono original são equicompostos, respectivamente, aos retângulos $I, II, III, IV, V, ...$ de base $b$. Construindo com estes retângulos um único retângulo de base $b$, temos que o mesmo é equicomposto ao polígono original, como ilustra a Figura 3.

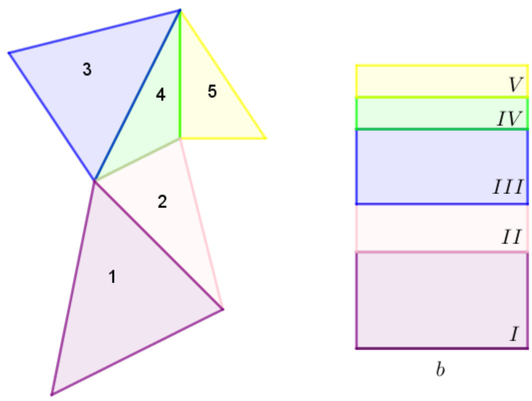



Figura 3: Polígono equicomposto a um retângulo - [6].

□

**Teorema 2.2** (Wallace-Bolyai-Gerwien). *Dois polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.*

*Demonstração.* Segundo o Lema 2.3, os dois polígonos são equicompostos a retângulos. Como estes retângulos têm a mesma área, pelo Lema 2.2 são equicompostos. Logo, os dois polígonos são equicompostos. $\square$

Ilustramos o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien com a Figura 4, a qual mostra um quadrado e um triângulo equicompostos.

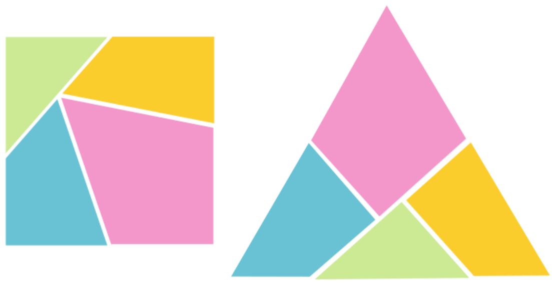


Figura 4: Quadrado e triângulo equicompostos - [16].

# 3 Calculando áreas por equicomposição

Podemos provar a relação para o cálculo da área de um polígono convexo por equicomposição empregando o Lema 2.3. Para tanto, devemos provar inicialmente a área do retângulo [6]. Na sequência, demonstramos por equicomposição a relação para o cálculo da área de um trapézio convexo.

**Teorema 3.1.** *A área do trapézio convexo de bases de medida $B$ e $b$ e altura de medida $h$ é $\dfrac{B+b}{2}h$.*

*Demonstração.* Seja o trapézio $ABCD$, tal que $\overline{AB} = B$ é a base maior e $\overline{CD} = b$ é a base menor, conforme ilustra a Figura 5.

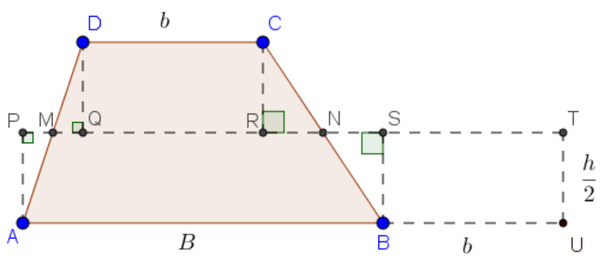



Figura 5: Trapézio equicomposto a um retângulo - [6].

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272

Sejam $M$ e $N$ os pontos médios dos lados não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Marcamos os pontos $P$, $Q$, $R$ e $S$ tal que $\overline{AP}$, $\overline{DQ}$, $\overline{CR}$ e $\overline{BS}$ são perpendiculares à $\overleftrightarrow{MN}$. Além disso, construímos $\overline{ST} \equiv \overline{BU} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{RQ} = b$, com $\overline{TU} \perp \overline{BU}$ e $\overline{TU} = \dfrac{h}{2}$, onde $h$ é a medida da altura do trapézio.

Assim, constatamos pelo caso $ALA_o$ (ângulo-lado-ângulo oposto) para triângulos retângulos, que $\Delta APM \equiv \Delta DQM$, pois:

$$\widehat{AMP} \equiv \widehat{DMQ}, \text{ uma vez que são ângulos opostos pelo vértice;}$$
$$\overline{AM} \equiv \overline{DM}, \text{ uma vez que } M \text{ é ponto médio de } \overline{AD};$$
$$\widehat{APM} \equiv \widehat{DQM} = 90^o, \text{ por construção.}$$

Analogamente, comprovamos que $\Delta CRN \equiv \Delta BSN$.

Como, por construção, os retângulos $CDQR$ e $TSBU$ são congruentes, o trapézio $ABCD$ é equicomposto ao retângulo $AUTP$, de base de medida $(B + b)$ e altura de medida $\dfrac{h}{2}$. Assim, sabendo que a área do retângulo é dada pelo produto entre as medidas da base e da altura, obtemos para a área $\mathcal{A}$ do trapézio $ABCD$:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(AUTP) = \overline{AU} \times \overline{TU} = (B + b) \times \frac{h}{2} = \frac{B + b}{2}h.$$

$\square$

O teorema de Pitágoras também pode ser provado por equicomposição. Uma dessas provas é a equicomposição de Perigal (Henry Perigal: 1801-1898). Na demonstração por equicomposição, Perigal seccionou o quadrado $ACFG$, construído sobre o maior cateto $\overline{AC}$, por duas retas $\overleftrightarrow{KL}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ passando pelo seu centro $J$, de tal forma que $\overline{KL}$ é paralelo à hipotenusa $\overline{BC}$ e perpendicular à $\overline{MN}$ ($\overline{KL}$ e $\overline{MN}$ são as diagonais do losango $KMLN$, portanto perpendiculares). Dessa forma, é possível mostrar que o quadrado $ACFG$ é dividido em quatro quadriláteros congruentes. Essas quatro partes, mais o quadrado construído sobre o menor cateto $\overline{AB}$, quando rotacionadas e transladadas, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa $\overline{BC}$, como mostra a Figura 6. Outras demonstrações do teorema de Pitágoras por equicomposição estão presentes em [12].

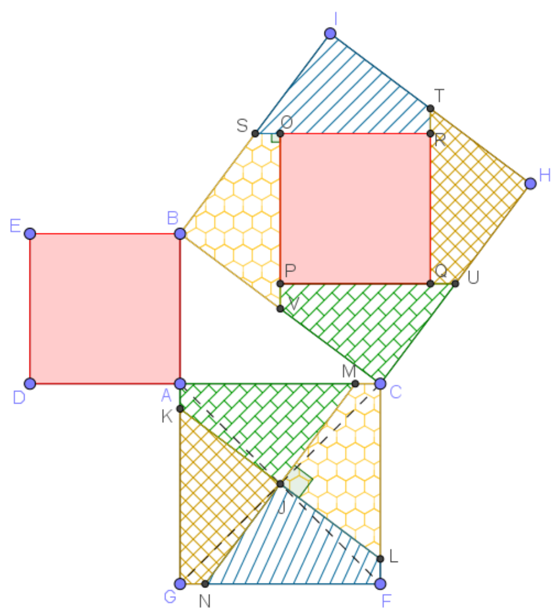
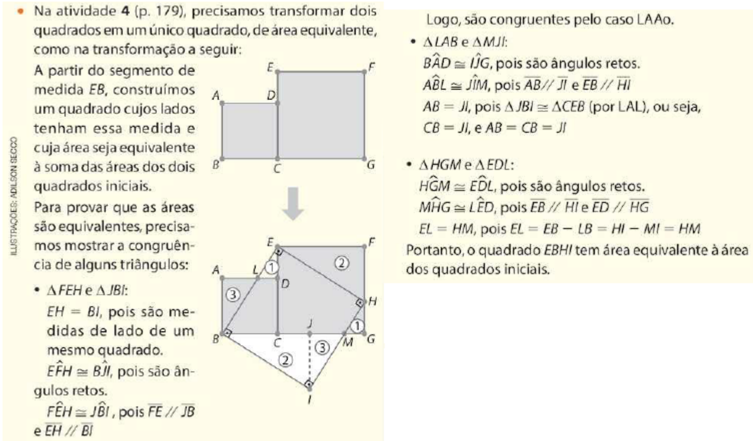



Figura 6: Equicomposição de Perigal - [6].

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272

# 4 Análise de livros didáticos



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

• Na atividade **4** (p. 179), precisamos transformar dois quadrados em um único quadrado, de área equivalente, como na transformação a seguir:

A partir do segmento de medida $EB$, construímos um quadrado cujos lados tenham essa medida e cuja área seja equivalente à soma das áreas dos dois quadrados iniciais.

Para provar que as áreas são equivalentes, precisamos mostrar a congruência de alguns triângulos:

- $\Delta FEH$ e $\Delta JBI$:
  $EH = BI$, pois são medidas de lado de um mesmo quadrado.
  $E\hat{F}H \cong B\hat{J}I$, pois são ângulos retos.
  $F\hat{E}H \cong J\hat{B}I$, pois $\overline{FE} \parallel \overline{JB}$ e $\overline{EH} \parallel \overline{BI}$
  Logo, são congruentes pelo caso LAAo.
- $\Delta LAB$ e $\Delta MJI$:
  $B\hat{A}D \cong I\hat{J}G$, pois são ângulos retos.
  $A\hat{B}L \cong J\hat{I}M$, pois $\overline{AB} \parallel \overline{JI}$ e $\overline{EB} \parallel \overline{HI}$
  $AB = JI$, pois $\Delta JBI \cong \Delta CEB$ (por LAL), ou seja, $CB = JI$, e $AB = CB = JI$
- $\Delta HGM$ e $\Delta EDL$:
  $H\hat{G}M \cong E\hat{D}L$, pois são ângulos retos.
  $M\hat{H}G \cong L\hat{E}D$, pois $\overline{EB} \parallel \overline{HI}$ e $\overline{ED} \parallel \overline{HG}$
  $EL = HM$, pois $EL = EB - LB = HI - MI = HM$

Portanto, o quadrado $EBHI$ tem área equivalente à área dos quadrados iniciais.



Figura 7: Orientações metodológicas sobre a equicomposição de quadrados - [7].

Analisamos seis livros de matemática para o Ensino Fundamental [1, 2, 4, 7, 14, 15] aprovados no PNLD em 2015 e 2016. Constatamos que todos eles abordam de alguma forma a equicomposição no plano para o cálculo da área de polígonos convexos. Essa abordagem é pictórica em alguns e formal em outros. Os autores exploram malhas quadriculadas, materiais manipulativos e *puzzles* em atividades lúdicas. As demonstrações formais geralmente não são apresentadas, mas os conceitos e ideias utilizados nelas são abordados na solução das atividades propostas. Destacamos em [7] as orientações metodológicas: nelas, a autora apresenta para o professor de matemática do Ensino Fundamental todos os passos para a construção da solução dos problemas propostos, com as demonstrações de cada etapa, como ilustra a Figura 7.

A avaliação completa dos livros analisados encontra-se em [6].

# 5 Conclusões

Apresentamos neste trabalho o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e empregamos a equicomposição de polígonos para demonstrar a relação para o cálculo da área do trapézio convexo. Em consonância com o que diz a BNCC sobre a equicomposição de polígonos, analisamos livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental aprovados no PNLD em 2015 e 2016. Verificamos que todos os autores das obras analisadas abordam a equicomposição no cálculo da área de polígonos convexos. Como testes oficiais, entre eles o ENEM por exemplo, têm explorado a equicomposição e os resultados dos estudantes das escolas públicas nesses testes não têm sido satisfatórios, perguntamo-nos o quanto o professor de matemática do Ensino Fundamental tem utilizado/explorado o livro didático de matemática oferecido pelo governo federal no PNLD.


# Agradecimentos

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

## Referências


[1] E. Bianchini. *Matemática Bianchini*, 8. ed., v. 7. Moderna, São Paulo, 2015.

[2] A. J. L. Bigode. *Matemática do cotidiano*, v. 6. Scipione, São Paulo, 2015.

[3] V. G. Boltianski. *Figuras equivalentes e equicompostas.* Atual, São Paulo, 1996.

[4] M. Centurión e J. Jakubovic. *Matemática nos dias de hoje, 6$^o$ ano: na medida certa*, v. 6. Leya, São Paulo, 2015.

[5] Escolar. *Tangram*, 2015. Disponível em: http://www.buscaescolar.com/artes/tangram/. Acesso em: 05.fev.2018.

[6] F. M. Fernandes, Polígonos e poliedros equidecomponíveis, Dissertação de Mestrado, UTFPR, 2018.

[7] M. R. G. Gay. *Projeto araribá matemática*, 4. ed., v. 9. Moderna, São Paulo, 2014.

[8] D. Hilbert. *Fundamentos de geometria.* Gradiva, Lisboa, 2003.

[9] F. Y. Kagoiki, Figuras equidecomponíveis, Monografia de Conclusão de Curso, UFSC, 2001.

[10] E. L. Lima. *Isometrias.* SBM, Rio de Janeiro, 2007.

[11] E. L. Lima. *Conceitos e controvérsias - polígonos equidecomponíveis*, 1985. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/11/5.htm. Acesso em: 05.fev.2018.

[12] E. S. Loomis. *The pythagorean proposition.* National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1968.

[13] MEC. *Base Nacional Comum Curricular*, 3 ed. Ministério da Educação, Brasília, 2017.

[14] E. Silveira. *Matemática - Compreensão e prática*, 3. ed., v. 9. Moderna, São Paulo, 2015.

[15] J. Souza e P. M. Pataro. *Vontade de saber matemática*, 3. ed., v. 8. FTD, São Paulo, 2015.

[16] Wikipedia. *Wallace-Bolyai-Gerwien theorem*, 2017. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Wallace-Bolyai-Gerwien_theorem. Acesso em: 05.fev.2018.

[17] WolframMathWorld. *Stomachion.* Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/Stomachion.html. Acesso em: 25.abr.2018.


DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272