Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Condições de qualificação, otimalidade e um método tipo lagrangiano aumentado

Frank N. Rojas[1]
Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, SP

Resumo.Neste trabalho estudamos condições de qualificação e otimalidade para Problemas de equilíbrio de Nash generalizados (GNEPs) relações análogas como o caso de otimização são discutidas. As GNEPs são uma generalização do clássico Problema de equilíbrio de Nash (NEP) onde os conjuntos de estratégias de cada jogador dependem das escolhas dos outros. Usando estas condições de qualificação e otimalidade definimos e provamos convergência global de um algoritmo tipo lagrangiano aumentado que calcula um ponto Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de uma GNEP.
Palavras-chave.Problemas de equilíbrio de Nash generalizados, Condições de otimalidade, condiçãoes de qualificação, lagrangiano aumentado

1 Introdução

John Forbes Nash (1928-2015) ampliou a teoria de Von Neumann e Morgenstern desenvolvida em Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico e demonstrou matematicamente a existência de um equilíbrio para jogos de n-pessoas em jogos não-cooperativas. O Problema de Equilíbrio de Nash (NEP) foi amplamente aprovado de ser eficiente, aplicável e rico de consequências.
A teoria do Equilíbrio de Nash foi generalizada por Debreu e formalmente abordada em seu trabalho, 'Um teorema de existência social de equilíbrio', em 1952, quando foi introduzido o termo GNEP (Problema do Equilíbrio de Nash Generalizado). Este trabalho serviu de base matemática para Arrow e Debreu escreverem o artigo, 'Existência de um Equilíbrio para Economia Competitiva', em 1954.
Após ao trabalho de Arrow e Debreu, pesquisadores concentraram seus estudos da GNEP com mais intensidade a partir da década dos 90, ao mesmo tempo que o GNEP passou a ser aplicado fora do âmbito econômico, como em ciências da computação, pesquisa operacional, engenharia das telecomunicações, problemas de transporte, análise de mercados e de cenários de poluição e outros; procurando então na necessidade de algoritmos para o cálculo de pontos de equilíbrio.
Este trabalho tem dois objetivos um de tipo qualitativo e outro algorítmico, primeiro definimos e estudamos condições de otimalidade e de qualificação para GNEPs fazendo uma analogia com otimização, conceitos como cone tangente, normal e linearizado são definidos e relações similares com otimização são encontradas, uma condição tipo Guignard é

[1]nilofrank@hotmail.com

estudada, discutiremos sobre a possibilidade que esta condição é a mínima condição que garante KKT em um ponto de equilíbrio.
Condições de qualificação (CQ) em otimização são condições que satisfeitas em uma solução garantem KKT, nos estendemos as clássicas CQ considerando a natureza das GNEP,a mais recente CQ serão usadas para a prova de convergência de um método tipo lagrangiano aumentado para GNEPs. O conceito de AKKT dado para problemas de otimização será estendido para GENPs e discutiremos sobre a possibilidade que seja uma condição de otimalidade para o GENP.
Como segundo ponto apresentamos um algoritmo tipo lagrangiano aumentado para achar um ponto KKT de uma GNEP,este algoritmo é sugerido por um algoritmo tipo penalidade para desigualdades quase variacionais (QVI) em [3].Provamos convergência global do método a um ponto KKT da GNEP usando a condição de qualificação CCP para GNEP,o método assim como no caso de otimização resolve GNEPs nos subproblemas que se acham sejam mais fácies de resolver que a GENEP original, um estudo de como resolver estes subproblemas é feito, alguns resultados numéricos são apresentados.

2 Condições de otimalidade e qualificação

Consideremos uma GNEP com N jogadores onde cada jogador controla a variável $x^v \in \mathbb{R}^{n_v}$, o problema para o $v-$esimo jogador é

$$\begin{array}{lll} P_v(x^{-v}) & & min f^v(x^v, x^{-v}) \\ & sujeto & g_i^v(x^v, x^{-v}) \leq 0 \quad i = 1, ..., m_v \end{array} \tag{1}$$

Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g^v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^v$ para $v = 1, ..., N$, onde $x^{-v} = (x^1, .., x^{v-1}, x^{v+1}, ..., x^N)$ e qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresado como $x = (x^v, x^{-v})$.
Um ponto de equilíbrio generalizado é um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $x^{*,v}$ satisfaz o problema $P^v(x^{*,-v})$ para cada $v = 1, ..N$.
Assumamos que f^v, g^v são C^1 para cada $v = 1, .., N$ se x^* é uma solução da GNEP e se uma condição de qualificação é satisfeita em $x^{*,v}$ com respeito ao conjunto $X^v(x^{*,-v}) = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : g^v(x^v, x^{*,-v}) \leq 0\}$ então existem vetores $\lambda^{*,v} \in \mathbb{R}^{m_v}$ tal que $(x^{*,v}, \lambda^{*,v})$ satisfaz as clássicas condições de Karush-Kunh-Tucker para o $v-$esimo jogador:

$$\begin{array}{ll} KKT_v : & \nabla_{x^v} L_v(x^v, x^{*,-v}, \lambda^v) = 0 \\ & \lambda_i^v \geq 0, \quad g_i^v(x^v, x^{*,-v}) \leq 0, \quad \lambda_i^v g_i^v(x^v, x^{*,-v}) = 0, \forall i = 1, ..m_v \end{array}$$

onde $L_v : \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{m_v} \to \mathbb{R}$ é o lagrangiano do problema $P^v(x^{*,-v})$ definido como:

$$L_v(x^v, x^{*,-v}, \lambda^v) = f^v(x^v, x^{*,-v}) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^v g_i^v(x^v, x^{*,-v})$$

Para uma GENP o sistema obtido pela união dos N sistemas KKT_v é chamado: **Sistema KKT associado à GNEP**.

$$L(x,\lambda)=0, \quad \lambda \geq 0, \quad g(x)\leq 0, \quad \lambda^T g(x)=0 \tag{2}$$

$L(x,\lambda)=(\nabla_{x^v} L^v(x,\lambda^v))_{v=1}^N$ e $g(x)=(g^v(x))_{v=1}^N \in \mathbb{R}^m$, $\lambda=(\lambda^v)_{v=1}^N \in \mathbb{R}^m$
O conjunto viável para a GNEP e denotado e definido como $W=\{x\in\mathbb{R}^n : g^v(x)\leq 0, \quad v=1,..,N\}$.
Para $v=1,..,n$ as restrições ativas do jogador $v-$esimo em $x^*\in W$ são definidas como $\alpha^v(x^*)=\{i : g_i^v(x^*)=0\}$.
Para uma GNEP conceitos como cone normal e tangente são definidos.

Definição 2.1. *(Cone N-tangente) Dados $x\in W$ denotamos por $\Gamma(x,N)$ o cone N-tangente a W em x e é definido por*

$$\Gamma(x,N)=\{0\}\cup\left\{d\in\mathbb{R}^n : \exists x^k\in X(x), x^k\to x, \quad \frac{x^{k,v}-x^v}{\|x^k-x\|}\to\frac{d^v}{\|d\|}, \quad v=1,..,N\right\}$$

Onde $X(x)=\prod_{v=1}^N X^v(x^{-v})$

Definição 2.2. *(Cone N-polar) Seja $C\subseteq\mathbb{R}^n$ um cone. Denotemos por C_N^0 o cone N-polar de C dado por:*

$$C_N^0=\{w\in\mathbb{R}^n : w^v d^v\leq 0, v=1,...,N, \quad \forall d\in C\}$$

Definição 2.3. *(Cone N-Linearizado) Dado $x\in W$ denotemos por $L(x,N)$ o cone N-linearizado de W em x dado por*

$$L(x,N)=\{w\in\mathbb{R}^n : w^v\nabla_{x^v} g_i^v(x)\leq 0, v=1,...,N \quad i\in\alpha^v(x)\}$$

Nós provamos o seguinte resultado.
Teorema 2.1 (KKT) Seja $x^*\in W$ uma solução da GNEP, e suponha que $\Gamma_N^0(x^*,N)=L_N^0(x^*,N)$, então existem para cada $v=1,..,N$ vetores $l^v\in\mathbb{R}^{m_v}$ tal que

$$-\nabla_{x^v} f^v(x^*)=\sum_{i\in\alpha^v(x^*)} l_i^v\nabla_{x^v} g_i^v(x^*) \quad l_i^v\geq 0$$

Discutiremos sobre a possibilidade que esta condição tipo Guignard $\Gamma_N^0(x^*,N)=L_N^0(x^*,N)$ seja a mínima condição de qualificação que garante KKT.
Nós introduzimos o conceito de ponto AKKT como no caso de otimização onde se prova que é uma condição de otimalidade para porblemas de programação linear com restrições de igualdade e desigualdade ver [2].

Definição 2.4. *(AKKT para GNEPs) Dizemos que $x^*\in W$ satisfaz AKKT se existe uma sequência (x^k) tal que*

$$\lim_{k\to\infty} x^k=x^*$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0339

e para cada $v = 1, ..N$ *existem multiplicadores* $\left\{\lambda^{k,v}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{r_v}_+$ *onde* $r_v = |\alpha^v(x^*)|$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i\in\alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v}\nabla_{x^v} g_i^v(x^k)\right\| = 0$$
$$\lambda_i^{k,v} \geq 0 (i \in \alpha^v(x^*))$$

Nós provamos que AKKT ém uma condição de otimalidade para NEPs e discutiremos sobre a possibilidade que também seja uma condição de otimalidade para uma GNEP geral.
Em otimização a condição de qualificação CCP foi introduzida e foi provada que é a mais fraca que garante que AKKT implica KKT. Nós provamos um resultado análogo definindo CCP para GNEPs da seguinte maneira.
Definição 2.5 (CCP-GNEP) Dizemos que ocurre CCP para a GNEP em um ponto $x^* \in W$ quando para cada $v = 1, ..., N$ a multifunção $K^v(.)$ é semicontinua exteriormente em x^* isto é $\limsup_{y\to x^*} K^v(y) \subset K^v(x^*)$,onde

$$K^v(y) = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n_v} : v = \sum_{i\in\alpha^v(x^*)} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(y) \quad \lambda_i^v \geq 0 \right\}$$

e

$$\limsup_{y\to x^*} K^v(y) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_v} : \exists y^k \to x^*, \exists w^k \to w, w^k \in K^v(y^k) \right\}$$

Esta condição de qualificação para GNEPs sera usada também para provar a convergência global de um algoritmo tipo lagrangiano aumentado para GNEPs.
Nós provamos que que CCP é a condição de qualificação mais fraca possível que garante que AKKT implica KKT.
Teorema 2.2 Seja $x^* \in W$ tal que satisfaz CCP se e somente se para quaisquer funções objetivo $f^1, .., f^N$ tal que x^* é AKKT então x^* é KKT.

3 Um algoritmo tipo lagrangiano aumentado e resultados de convergência

O seguinte algoritmo tipo lagrangiano aumentado e definido para obter um ponto KKT de uma GNEP.
Algoritmo (Enfoque com sequências de GNEPs para a GENP)
P1) Seja $u^{max} \in \mathbb{R}^m_+$, $\tau \in \langle 0, 1\rangle$, $\gamma > 1$ escolhemos $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $u^0 \in [0, u^{max}]$, $\rho^0 \in \mathbb{R}^N$ com $\rho^0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$. Fazer $k = 0$
P2) Se (x^k, λ^k, μ^k) é um ponto KKT da GNEP parar.
P3)Calcular um ponto (x^{k+1}, μ^{k+1}), ϵ_k- aproximado KKT do $GNEP(u^k, \rho^k)$ isto é um

ponto que satisfaz para cada $v = 1, .., N$

$$\left\| \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \max\left\{0, u_i^{k,v} + \rho^{k,v} g_i^v(x^v, x^{-v})\right\} \nabla_{x^v} g_i^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v \nabla_{x^v} h_j^v(x^v, x^{-v}) \right\| \leq \epsilon_k \quad (3)$$

$$\mu_j^v \geq -\epsilon_k \quad h_j^v(x^v, x^{-v}) \leq \epsilon_k, \quad \left|\mu_j^v h_j^v(x^v, x^{-v})\right| \leq \epsilon_k, \quad j = 1, ..., l_v \quad (4)$$

depois definir $\lambda^{k+1,v} = max\left\{0, u^{k,v} + \rho^{k,v} g^v(x^{k+1})\right\}$ para $v = 1...N$
P4)Para $v = 1, ..., N$, se

$$\left\| max\left\{g^v(x^{k+1}), -\lambda^{k+1,v}\right\}\right\| \leq \tau \left\| max\left\{g^v(x^k), -\lambda^{k,v}\right\}\right\|$$

entao $\rho^{k+1,v} = \rho^{k,v}$ outro caso $\rho^{k+1,v} = \gamma\rho^{k,v}$
P5) Escolher $u^{k+1} \in [0, u^{max}]$ e $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k$. Fazer $k \to k+1$ ir ao passo 2.
Nós provamos que o algotirmo gera sequências AKKT e obtemos o seguinte resultado de convergência.
Teorema 3.1 Seja x^* um ponto de acumulação de uma sequência (x^k) gerada pelo algoritmo, seja $\epsilon_k \to 0$ e assumamos que a ϵ_k−estacionaridade ocorre com $\mu^{k,v} \geq 0$ para cada $v = 1, .., N$.
Se x^* satisfaz CCP entao existem multiplicadores $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ tal que (x^*, λ^*, μ^*) é um ponto KKT da GNEP.

4 Conclusões

O trabalho apresenta propridades qualitativas para as GNEPs que preenchem um vazio na literatura das GNEPs, onde tem-se uma predominância de trabalhos sobre algoritmos para calcular pontos de equilíbrio.
Apresentamos também um metodo robusto que tem convergência global sem hipoteses de convexidade.

5 Agradecimentos

Quero agradecer a meu orientador o professor Gabriel Haeser e a meu coorientador o professor Luis Felipe Bueno por suas valiosas sugestões para o desenvolvimento da pesquisa.

Referências

[1] E. G. Birgin and J. M. Martínez. Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2014.

[2] G. Haeser, A. Ramos - Condições de Otimalidade e Algoritmos em Otimização não Linear. SBMAC, Notas em Matemática Aplicada, vol 83, (85p.) e-ISBN: 978-85-8215-075-7, 2016. (pdf)

[3] C. Kanzow. On the multiplier-penalty-approach for quasi-variational inequalities. Math. Program., 160(1-2, Ser. A):3363, 2016.

