Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Avaliação de Empreendimentos em Condição de Incerteza

Amaury S. Amaral[1]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Resumo. Trabalhamos nesse projeto por uma apresentação de uma proposta de avaliação de empresas que incorpore em seus cálculos condições de incerteza inerentes ao negócio, as quais possam ser representadas por funções de probabilidade. A questão de pesquisa que esse trabalho busca responder é a de como modelar o cálculo da formação do resultado do valor de um negócio, considerando o risco, a incerteza e a continuidade no comportamento das variáveis formadoras de seus resultados. Inicialmente é apresentada uma abordagem proposta por [2] de avaliação de empreendimentos com formulação em tempo contínuo. Por um lado, a receita, que representa o faturamento de um empreendimento, é tratada como um processo estocástico, representado por um movimento browniano, que fornece por hipótese uma noção razoável do seu comportamento. Por outro, a despesa, que representa a amortização da componente receita, é tratada igualmente pelo mesmo processo. Com o valor líquido obtido é apresentada uma abordagem de avaliação do empreendimento. Os fatores externos não intrínsecos ao negócio são captados pela adição de uma outra variável ao valor inicial da empresa, compondo-se assim o valor total da entidade.

Palavras-chave. avaliação, empresas, incertezas, risco, estocástico.

1 Introdução

As primeiras técnicas de determinação de valores de uma entidade de negócios remontam à metade do século XX, por volta dos anos de 1950 [13]. O início de todo desenvolvimento teórico de técnicas de precificação de ações de uma empresa começou, principalmente, com o estabelecimento do "princípio fundamental", desenvolvido por Modigliani e Miller ao projetar-se no futuro os preços presentes de tais ações [13] , [10], [7] e [12]. Por tais projeções o preço patrimonial da empresa é determinado por um fator de mercado. Por um caminho oposto pode-se tentar obter o preço desse patrimônio por suas componentes individuais projetadas. Uma componente, a de receita de venda são influenciadas por variáveis econômicas de preços do mercado sujeita a lei de oferta e procura dos produtos ou serviços, e por seu turno, a outra componente, as despesas por custos de compra. A resultante disso representa o lucro projetado que será a adicionado ao patrimônio da entidade. Desta forma a projeção de resultados futuros, integrantes do patrimônio da empresa, se submetem também a forças de leis de mercados, não controláveis. Dois preços tendo origens diferentes para um mesmo objeto ocorrem, quer seja pela crença dos investidores, quer seja pelo desempenho da resultante econômico (lucro). De qualquer modo, ambos acrescem ou diminuem o valor desta sociedade.

[1]asamaral@pucsp.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0331

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

2 Modelo de Tempo Contínuo para Fluxo de Caixa Livre

A maioria dos modelos de avaliação de empreendimentos aborda sua análise através de períodos de tempo discretos, onde o exercício financeiro é, geralmente, considerado ao final de cada período. As abordagens com tempo discreto são suficientes para uma série de avaliações. Veja, por exemplo [5], [10] e [11].

Para a apresentação da modelagem do fluxo de caixa livre em tempo contínuo, será utilizada a seguinte notação proposta por [2], com base em [6], [7] e [8].

O fluxo de caixa livre pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} Y &= (1-\tau)(R - c_0 - c_1 R) + \Delta ImpProt + Dep - DeCap - \Delta CGL \\ Y &= (1-\tau)(1-c_1)R - (1-\tau)c_0 + \Delta ImpProt + Dep - DeCap - \Delta CGL \ , \end{aligned}$$

com a notação Y = fluxo de caixa livre; R = receita; $c_0 + c_1 R$ = custos operacionais, com c_0 e c_1 constantes; $DeCap$ = despesas de capital; ΔCGL = acréscimo em capital de giro líquido; Dep = depreciação; $\Delta ImpProt$ = acréscimo em impostos protelados; τ = taxa de imposto da empresa; r_f = taxa de risco zero; r_d = taxa de endividamento da empresa; k = custo do patrimônio líquido da empresa; ω = custo médio ponderado de capital ($CMePC$).

Fazendo-se $\Delta ImpProt + Dep - DeCap - \Delta CGL = 2$,

$$Y = a + bR \ , \quad \text{onde} \tag{1}$$

$a = -(1-\tau)c_0 + \Delta ImpProt + Dep - DeCap - \Delta CGL$ e $b = (1-\tau)(1-c_1)$.

Pode-se demonstrar facilmente que $\frac{dR}{R} = \alpha dt + \sigma dz$, onde: α = taxa de crescimento esperada para a receita, σ = desvio padrão de dR/R, dz = mudança em $z(t)$, sendo $dz = \varepsilon dt^{1/2}$, e ε uma distribuição de probabilidades normal de média zero e desvio padrão igual a 1.

A função $z(t)$ é representada por Movimento Browniano. Sendo os fluxos de caixa livre função de receitas, variações em Y podem ser expressas pelo diferencial:

$$dY = bdR = b\alpha R dt + b\sigma R dz \ . \tag{2}$$

Segundo [2], a equação do movimento browniano geométrico representa um razoável comportamento dos preços das ações.

3 Avaliação de Empreendimentos em Tempo Contínuo

O valor de uma empresa pode ser determinado pela abordagem de tempo contínuo com movimento browniano. Para isso, basta descontar em tempo contínuo o fluxo de caixa livre obtido também em tempo contínuo. Isto é possível computando-se o valor presente através da seguinte integração (veja mais detalhes em [9] e [2]):

$$\begin{aligned} V(R) &= a\int_0^\infty \exp(-1(1-\tau)r_d t)dt + b\int_0^\infty E(R)\exp(-\omega t)dt \\ V(R) &= a[-(1-\tau)r_d \exp(-(1-\tau)r_d t]_0^\infty + bR_0 \int_0^\infty \exp(-(\omega-\alpha)t)dt \qquad (3) \\ V(R) &= \frac{a}{(1-\tau)r_d} + \frac{bR_0}{\omega - \alpha} \ , \end{aligned}$$

onde $(1-\tau)r_d$, ω e α denotam as taxas equivalentes em tempo contínuo. Este valor é um pouco maior que o valor encontrado para o fluxo de caixa em tempo discreto, pois, segundo [2], a formulação em tempo contínuo permite a chegada do fluxo de caixa continuamente através do tempo e não só no final do período do desconto.

4 Avaliação de Empreendimentos em Condição de Incerteza

Para o desenvolvimento deste item, será utilizado como exemplo um caso particular do valor de uma firma que possui o direito de exploração de um poço de petróleo, mediante a realização de um investimento I conhecido. Além da incerteza na receita devido à volatilidade do preço do petróleo, será considerada também uma incerteza na quantidade K de óleo contida no poço, representada pelo valor esperado de K que é $\overline{K}$ e pelo desvio padrão σ_K. Dessa forma o problema pode ser descrito através das seguintes hipóteses e parâmetros:

p - preço do petróleo, com variação dp descrita pela seguinte equação: $dp = \alpha p dt + \sigma p \varepsilon_i dt^{1/2}$, sendo: α a taxa de crescimento esperada do preço do petróleo (em tempo contínuo), σ a volatilidade do preço do petróleo e ε_i a normal de média zero e variância igual a 1.

Assim, pode-se definir os lucros gerados Y da seguinte forma: $Y = bqp + a$, sendo: b a margem de lucro da receita $(0 < b < 1)$, q a vazão constante com que o petróleo é retirado do poço (qtde/tempo), a o custo fixo, p o preço do petróleo.

Como a quantidade de óleo a ser retirado é finita, o tempo T de duração da exploração deste poço será:

$$T = \frac{K}{q} \ . \tag{4}$$

Como a quantidade K de óleo é incerta, o tempo de exploração T também será incerto, já que o petróleo é retirado a um fluxo constante q.

A pergunta que se faz é: Qual o valor deste empreendimento?

Para o cálculo do valor deste empreendimento, será utilizada a equação (3):

$$V(p) = bq\int_0^{\infty} E(p)\exp(-\omega t)dt + a\int_0^{\infty} \exp[-(1-\tau)r_d t]dt \ .$$

A diferença na aplicação desta equação para o valor do empreendimento de exploração do poço de petróleo é que as receitas se encerrarão no instante T. Dessa forma, deve-se reescrever os limites de integração da equação (3) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(p) &= bq\int_0^{T} E(p)\exp(-\omega t)dt + a\int_0^{T} \exp[-(1-\tau)r_d t]dt \ . &(5)\\ V(p,t) &= \frac{bqp_0}{\omega-\alpha}\left[1-\exp[-(\omega-\alpha)T]\right] + \frac{a}{(1-\tau)r_d}\left[1-\exp[-(1-\tau)r_d T]\right] \ . &(6) \end{aligned}$$

Como se pode perceber, o valor da empresa depende do tempo T, que é incerto. Como então resolver este problema?

Como o tempo T se relaciona com a quantidade de petróleo K da seguinte forma:

$$T = \frac{K}{q} \quad \text{e} \quad \sigma_T^2 = \frac{\sigma_K^2}{q^2} \text{ , onde } \delta_T \text{ é a variância.} \tag{7}$$

Assim, é proposto que a determinação do valor desta empresa seja realizado através do seguinte cálculo:

$$V(p) = \int_{-\infty}^{\infty} V(p,T)P(T)dT \ . \tag{8}$$

Assumindo-se que a função probabilidade $P(T)$ possa ser representada por uma gaussiana, com média $\overline{T} = \overline{K}/q$ e variância σ_T^2, a equação (8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{bqp_0}{\omega - \alpha}[1 - \exp[-(\omega-\alpha)T]] + \frac{a}{(1-\tau)r_d}[1 - \exp[-1(1-\tau)r_d T]] \right\} \frac{\exp\left[\frac{-(T-\overline{T})^2}{2\sigma_T^2}\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} dT \tag{9}$$

Rearranjando-se os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{bqp_0}{\omega-\alpha}\left\{1 - \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{\exp\left[\frac{-(T-\overline{T})^2}{2\sigma_T^2} - (\omega-\alpha)T\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}}\right\} + \\ & \frac{a}{(1-\tau)r_d}\left\{1 - \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{\exp\left[\frac{-(T-\overline{T})^2}{2\sigma_T^2} - (1-\tau)r_d T\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}}\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Considere agora a seguinte integral I:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[\frac{-(T-\overline{T})^2}{2\sigma_T^2} - (\omega-\alpha)T\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} = I \ . \tag{11}$$

Considerando $u = T - \overline{T}$, temos que $du = dT$. Substituindo-se estes valores em (11):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left[\frac{-u^2}{2\sigma_T^2} - (\omega-\alpha)(u+\overline{T})\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} = \frac{e^{-(\omega-\alpha)\overline{T}}}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[\frac{-u^2}{2\sigma_T^2} - (\omega-\alpha)u\right] \tag{12}$$

Substituindo e rearranjando,

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{bqp_0}{\omega-\alpha}\left\{1 - \exp\left[\frac{(\omega-\alpha)^2\sigma_T^2}{2} - (\omega-\alpha)\overline{T}\right]\right\} + \\ & \frac{a}{(1-\tau)r_d}\left\{1 - \exp\left[\frac{(1-\tau)^2 r_d^2 \sigma_T^2}{2} - (1-\tau)r_d\overline{T}\right]\right\} \ . \end{aligned} \tag{13}$$

É importante notar que a equação (8) tem aplicação no tratamento de variáveis econômicas desde que seja possível a adoção de uma distribuição de probabilidade para descrição de seu comportamento. Para esse desenvolvimento foram fundamentais [1] e [4].

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

5 Cálculo das Incertezas Externas

A proposta deste item é avaliar como incertezas externas ao negócio podem influenciar as avaliações. Para esse desenvolvimento será feito um estudo do valor da opção de compra [3] do mesmo poço de petróleo do exemplo anterior.

Considere que o detentor do direito de exploração do poço de petróleo queira saber qual o valor da opção de compra deste direito, considerando-se uma maturidade T (data de exercício da opção a partir de $t = 0$), sendo I o valor a ser investido para a retirada de óleo do poço, que representará o preço de exercício.

Este poço de petróleo ainda apresenta uma incerteza na sua quantidade K total de óleo, representado pelo valor $\overline{K}$ (valor esperado de K), e pelo desvio-padrão σ_K (K em barris de óleo). Sabendo que o preço do petróleo é representado por um movimento browniano geométrico, a pergunta que se faz é: qual o valor desta opção de compra?

A primeira hipótese a ser feita é a de que o valor do poço de petróleo em cada instante i será dado pela multiplicação do preço do petróleo em i pela quantidade K. Então o valor do poço de petróleo no instante T será: Valor do poço de petróleo em $T = P_T.K$.

Dessa forma, temos duas variáveis aleatórias e independentes: P_T e K.

A segunda hipótese será a seguinte:

$$P_S\overline{K} = I \quad \text{e} \quad P_S = \frac{I}{\overline{K}} \ , \tag{14}$$

onde P_S representa o preço de exercício da opção em termos do preço do petróleo, $\overline{K}$ o valor esperado de K e I o investimento para exaustão do poço. Assim, a opção será exercida se $P_T > P_S$.

Para se determinar o valor desta opção de compra para o poço de petróleo, é verificado o preço dessa opção de compra de uma unidade de barril no mercado futuro com preço de exercício igual a P_S, para o mesmo período de maturidade T. Multiplicando-se este resultado por $\overline{K}$, obtém-se: $C_T(P_S) = \overline{K}.C_1(P_S)$, sendo $C_T(P_S)$ o custo total e $C_1(P_S)$ o custo da opção de compra de uma unidade de barril a um preço de exercício P_S com maturidade em T.

Assim, o retorno R_{MF} no instante T de maturação da opção de compra do barril no mercado futuro será:

$$\begin{array}{ll} R_{MF} = 0 \ , & \text{se } P_T < P_S \ ; \\ R_{MF} = (P_T - P_S)\overline{K} \ , & \text{se } P_T > P_S \ . \end{array} \tag{15}$$

Já o retorno R_{OR} da opção de compra do poço de petróleo em T será:

$$\begin{array}{ll} R_{OR} = 0 \ , & \text{se } P_T < P_S \ ; \\ R_{OR} = (P_T - P_S)\overline{K} \ , & \text{se } P_T > P_S \ . \end{array} \tag{16}$$

A diferença Δ_{OR-MF} de retorno entre a opção real e o mercado futuro

$$\begin{array}{ll} \Delta_{OR-MF} = 0 \ , & \text{se } P_T < P_S \ ; \\ \Delta_{OR-MF} = (K - \overline{K})P_T \ , & \text{se } P_T > P_S \ . \end{array} \tag{17}$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0331

Então, o valor esperado dessa diferença será: $E[(K-\overline{K})P_T \perp P_T > P_S] = 0$. A variância será dada por:

$$E[(K-\overline{K})^2 P_T^2 \perp P_T > P_S] = E[(K-\overline{K})^2]E[P_T^2 \perp P_T > P_S] = \sigma_E^2 \ ,$$
$$\sigma_E = \sigma_K \left(\sqrt{P_T^2} \perp P_T > P_S \right) \ . \tag{18}$$

Dessa forma, qual será o valor da opção de compra deste poço de petróleo?

- Resposta: Não menos que $\overline{K}.C_1(P_S) - \lambda\sigma_E$, onde λ representa o preço de risco estipulado pelo mercado.

6 Generalização de Avaliação de Empreendimentos em Condição de Incerteza

Além das incertezas inerentes ao negócio, incertezas externas ao empreendimento como previsões econômicas, avaliação de risco do mercado, etc, podem contribuir na determinação de valores destes empreendimentos. A proposta a seguir sugere uma forma matemática de se incorporar estes riscos externos ao valor do empreendimento, através da seguinte formulação:

$$V_M(p) = V(p) - \lambda\sigma_E \ , \tag{19}$$

sendo: $V_M(p)$ o valor do empreendimento visto pelo mercado, $V(p)$ o valor do empreendimento, λ o preço de risco do mercado e σ_E o desvio-padrão intrínseco ao negócio.

As incertezas internas referem-se às incertezas no preço do petróleo (representada pela volatilidade σ_p) e pela incerteza na quantidade, representado por σ_K. Dessa forma, pode se escrever, de acordo com a equação (18), que:

$$\sigma_E = \sigma_K \sigma_p \ . \tag{20}$$

Assim, a expressão que melhor representa o valor do poço de petróleo da equação (13), incorporando-se riscos externos ao negócio, será:

$$\begin{aligned} V(p) \quad = \quad & \frac{pqp_0}{\omega-\alpha}\left\{1-\exp\left[\frac{(\omega-\alpha)^2\sigma_T^2}{2}-(\omega-\alpha)\overline{T}\right]\right\}+ \\ & \frac{a}{(1-\tau)r_d}\left\{1-\exp\left[\frac{(1-\tau)^2 r_d^2\sigma_T^2}{2}-(1-\tau)r_d\overline{T}\right]\right\}-\lambda\sigma_p\sigma_K \ . \end{aligned} \tag{21}$$

7 Conclusão

Em decisões de investimentos, o investidor normalmente se depara com um conjunto de incertezas como, por exemplo, o comportamento aleatório da receita, a concorrência de outros competidores, etc. É nesta situação que decisões devem ser tomadas para a aplicação dos recursos e minimização dos riscos.

As decisões de investimentos não seguem apenas regras matemáticas. Os investidores normalmente se valem de alguma informação mais significativa para atingir o grau

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0331

de confiança desejado e, assim, acabam por "apostar"no negócio. Isto ocorre devido ao conjunto de incertezas sobre o futuro que qualquer negócio possui intrinsecamente. Estas incertezas tornam a aplicação de técnicas matemáticas de decisão limitadas e, inevitavelmente, sempre ao se ingressar em um negócio o investidor estará correndo riscos. Dessa forma, cada empreendedor desenvolve suas "regras de decisão"baseadas na sua própria visão estratégica.

Referências

[1] ABRAMOWITS, M.; STEGUN, I. A.; Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, John Wiley & Sons, 10 ed, 1972.

[2] ARZAC, E. R., Valuation for Mergers, buyouts, and Restructuring, John Wiley & Sons, Inc., 2005.

[3] BRENDAN, M. J. and L. TRIGEORGIS, eds., Project of Corporation Finance, 7th. ed., New York, Oxford University Press, 2000.

[4] CHANDRASEKHAR, S. Stochastic problems in physics and astronomy, Reviews of Modern Physics, Vol. 15, No1, Apêndice 4: "The mean and the mean square deviation of the sum of two probability distributions´´, (1943).

[5] DAMODARAN, A. *The dark side of valuation.* Prentice Hall, 2001.

[6] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S.; Investment Under Uncertainty, Princeton University Press, 1994.

[7] DIXIT, A. K.; Entry and Exit Options under Uncertainty, Journal of Political Economy, 97, 620-638, (1989).

[8] DIXIT, A. K.; The Art of Smooth Pasting, Vol. 55, em Lesourne, J.; Sonnenschein, eds., Fundamentals of Pure and Applied Economics, Chur, Switerzland: Harwood Academic Publishers, 1993.

[9] EBERLEIN, E., and D. B. MADAN. "Unlimited Liabilities, Reserve Capital Requirements and the Taxpayer Put Option, nWorking Paper, Robert H.´´ Smith School of Business (2010).

[10] HENDRIKSEN, E. S.; Accounting Theory. Irwin-Dorsey Georgetown Ontario, 1977.

[11] IUDÍCIBUS, S.; Teoria da Contabilidade, Editora Atlas S.A., 7a. ed., 2004.

[12] MACDONALD, R. and D. SIEGEL. "The value of waiting to invest". The Quarterly Journal of Economics, 101.9 (1986):707.

[13] MODIGLIANI, F. and MILLER, "The rest of capital, Corporation Finance and the Theory of Investment", American Economic Review, 48, 1958, 261–297.

