Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* para o problema de dimensionamento de lotes com preparações *carryover* e *crossover*

Silvio Alexandre de Araujo[1]
Jackeline del Carmen Huaccha Neyra[2]
Diego Jacinto Fiorotto[3]
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, SP, Brasil

Resumo. Os problemas de dimensionamento de lotes consistem em determinar a quantidade de itens que devem ser produzidos em todos os períodos de um horizonte de planejamento. Em geral, são considerados custos de produção, preparação de máquina e de manutenção de estoque. Neste trabalho estuda-se uma extensão do problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade que considera tempos de preparação, preparação *carryover* e *crossover*, em que se tem uma única máquina, único estágio, multi-itens e *big-bucket* (CLSP-SCC). Para a resolução do problema é proposta uma heurística híbrida que combina as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* (RF-FO), em que a heurística *Relax-and-Fix* é usada para obter uma solução inicial e a heurística *Fix-and-Optimize* melhora essa solução. Por fim, apresentam-se os resultados computacionais comparando os resultados da heurística com os do pacote computacional CPLEX.

Palavras-chave. Problemas de Dimensionamento de Lotes com Restrição de Capacidade, Preparação *Carryover*, Preparação *Crossover*, Heurística *Relax-and-Fix*, Heurística *Fix-and-Optimize*

1 Introdução

Neste trabalho, considera-se o Problema de Dimensionamento de Lotes com Restrição de Capacidade (*Capacitated Lot-Sizing Problem*-CLSP) em que se tem uma única máquina, único-estágio, multi-itens, *big bucket* e tempos e custos de preparação, onde os tempos de preparação são menores do que a capacidade por período.

Na formulação clássica deste problema (proposta em [8]), a preparação para o primeiro tipo de item produzido em um período começa no início deste período. Neste trabalho, estuda-se uma extensão deste problema de dimensionamento de lotes que inclui as possibilidades de preparações *carryover* e *crossover*. Observa-se que considerar esta extensão pode resultar em soluções mais eficientes em comparação com a formulação clássica.

[1]saraujo@ibilce.unesp.br
[2]jacky_157_93@hotmail.com
[3]diego_fiorotto@homail.com

O CLSP com preparações *carryover* e *crossover* (CLSP-SCC) é uma extensão da formulação clássica. A **preparação *carryover*** define-se como a possibilidade de começar um período com produção (ao invés de preparação) de um determinado item que estava sendo produzido no final do período anterior. Excluindo assim a necessidade de uma nova preparação para este item e, portanto, economizando em tempos e custos de preparação.

Por outro lado, a **preparação *crossover*** (ou *setup splitting*) permite a possibilidade de uma preparação começar no fim de um período e terminar no início do período seguinte, isto é, a preparação de um item pode expandir-se sobre dois períodos.

Enquanto incorporar a preparação *carryover* nos modelos nos leva mais perto da realidade, existem muitas situações em que a preparação começa no final do período e não tem tempo suficiente para terminá-la nesse mesmo período. A fim de utilizar a capacidade disponível de maneira mais eficiente pode-se incluir a preparação *crossover*: [6]; [5]; [4]; [1]; [2].

Neste trabalho propõe-se propor uma heurística híbrida *Relax-and-fix* e *Fix-and-Optimize* para o problema com preparação carryover e crossover obtém-se resultados computacionais para analisar o seu comportamento.

2 Modelos Matemáticos

A seguir apresenta-se a formulação para o CLSP-SCC baseada nas ideias propostas por [7], [4] e [5]. Observa-se que as formulações que são apresentadas não são exatamente aquelas propostas nos referidos artigos, mas sim as ideias para modelar as preparações *carryover* e *crossover*. Mais especificamente formulação baseia-se em [7] e [5] para modelar a preparação *carryover* e em [4] para modelar a preparação *crossover*. Além disso, considera-se o problema de dimensionamento de lotes reformulado como um problema de localização de facilidades (ver [3]). Para obter uma correta formulação do problema, ao longo deste capítulo, assume-se que quando uma preparação é dividida entre os períodos $t-1$ e t, $v_{i,t-1} = 1$, o custo e tempo de preparação a ser considerados, tanto para a função objetivo como para as restrições de capacidade, são aqueles do período em que a produção é feita, i.e. no período t.

São definidos os seguintes parâmetros e variáveis:

Parâmetros:

$I = \{1, \ldots, n\}$**:** conjunto de itens;

$T = \{1, \ldots, m\}$**:** conjunto de períodos;

d_{it}**:** demanda do item i no período t;

$sd_{it\tau}$**:** soma da demanda para o item i, desde o período t até o período τ ($\tau \geq t$);

hc_{it}**:** custo unitário de estoque do item i no período t;

sc_{it}**:** custo de preparação para o item i no período t;

vc_{it}**:** custo de produção do item i no período t;

st_i: tempo da preparação do item i;

vt_i: tempo de produção do item i;

C_t: capacidade (em unidades de tempo) no período t.

cs_{itk}: custo de produção e de estoque para produzir uma unidade do item i no período t para satisfazer a demanda do período k

$$cs_{itk} = (vc_{it} + \sum_{u=t}^{k-1} hc_{iu})d_{ik}$$

Variáveis:

y_{it}: variável binária de preparação para o item i no período t ($y_{it} = 1$ se uma preparação é feita para o item i no período t; e 0, caso contrário);

x_{itk}: fração da demanda do item i no período k produzida no período t

$zeta_{it}$: variável binária, $zeta_{it} = 1$ se a preparação *carryover* para o item i é feita do período t para $t+1$; e 0, caso contrário;

v_{it}: variável binária, $v_{it} = 1$ se a preparação *crossover* para o item i é feita entre o período t e o período $t+1$; e 0, caso contrário;

u_t: tempo extra emprestado do período t para a preparação no período $t+1$;

Q_t: variável binária que indica se o período t é ocioso ou não.

- Formulação $F1$

$$v(F1) = \min \sum_{i\in I}\sum_{t\in T} sc_{it}y_{it} + \sum_{i\in I}\sum_{t\in T}\sum_{k=t}^{m} cs_{itk}x_{itk} \tag{1}$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{t} x_{ikt} = 1, \qquad \forall i \in I,\ t \in T | d_{it} > 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} st_{it}y_{it} + \sum_{i\in I}\sum_{k=t}^{m} vt_{it}d_{ik}x_{itk} + u_t \leq C_t + u_{t-1}, \qquad \forall t \in T \tag{3}$$

$$x_{itk} \leq y_{it} + zeta_{i,t-1}, \qquad \forall i \in I,\ t \in T,\ k \in T,\ k \geq t \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I}(v_{i,t-1} + zeta_{i,t-1}) \leq 1, \qquad \forall t \in T \tag{5}$$

$$zeta_{it} \leq zeta_{i,t-1} + y_{it} + v_{i,t-1}, \qquad \forall i \in I,\ t \in T \tag{6}$$

$$u_{t-1} \leq \sum_{i \in I} st_i v_{i,t-1}, \qquad \forall t \in T \tag{7}$$

$$v_{i,t-1} \leq y_{it}, \qquad \forall i \in I,\ \forall t \in T \tag{8}$$

$$zeta_{i,t-1} + zeta_{it} \leq 1 + Q_t, \qquad \forall i \in I,\ t \in T \tag{9}$$

$$y_{it} + Q_t \leq 1, \qquad \forall i \in I,\ \forall t \in T \tag{10}$$

$$y_{it},\ v_{it},\ zeta_{it},\ Q_t \in \{0,1\},\ u_t \geq 0, \qquad \forall i \in I,\ t \in T \tag{11}$$

$$v_{i0} = zeta_{i0} = u_0 = Q_0 = Q_T = 0,\ x_{itk} \geq 0, \quad \forall i \in I,\ t \in T,\ k \in T,\ k \geq t. \tag{12}$$

A função objetivo (1) minimiza os custos de preparação, de produção e estoque. As restrições (2) garantem que a demanda seja satisfeita e (3) são as restrições de capacidade em que a soma total dos tempos de preparação e de produção considerando também o tempo a ser emprestado para o próximo período, u_t, é limitada pela capacidade do período, C_t, mais o tempo que foi emprestado desde o período anterior, u_{t-1}, em caso de ter preparação *crossover*. As restrições de preparação (4) não permitem produção no período t a menos que uma preparação seja feita ou tenha preparação *carryover* desde o período anterior $t-1$. As restrições (5) estabelecem que pode ocorrer preparações *carryover* ou *crossover* para apenas um item em cada período. As restrições (6) indicam que pode ter preparação *carryover* desde o período t até $t+1$ apenas se houver uma preparação no período t ou se tiver uma preparação *carryover* desde o período $t-1$ ou uma preparação *crossover* entre os períodos $t-1$ e t. As restrições (7) limitam o tempo emprestado do período $t-1$ usado no período t ao valor do tempo de preparação do item para o qual é realizado a preparação *crossover*. As restrições (8) asseguram que só poder ter preparação *crossover* entre período $t-1$ e o período t se houver preparação no período t. As restrições (9) garantem que se tem preparação *carryover* para o item i desde o período $t-1$ até t e desde t até $t+1$ então o período t é ocioso. As restrições (10) indicam que se há uma preparação então período não é ocioso. E por último, as restrições (11) e (12) definem os domínios das variáveis.

3 Método de Solução

No contexto de problemas de dimensionamento de lotes, a heurística *Relax-and-Fix* (RF) trata-se de uma heurística iterativa que consiste em fixar as variáveis binárias de preparação apenas para um subconjunto de índices e relaxar as restantes a fim de obter subproblemas mais simples, para os quais pode-se encontrar uma solução factível. Com base nas ideias de Suerie e Stadtler (2003), usando decomposição por períodos, no presente trabalho divide-se o horizonte de planejamento em três janelas: a janela de fixação de um subconjunto de variáveis binárias, a janela de *overlap* (janela de sobreposição) e a janela de relaxação das variáveis. As variáveis consideradas neste trabalho são variáveis de preparação, preparação *carryover* e preparação *crossover*.

A heurística *Fix-and-Optimize* (FO) é uma heurística de melhoria e tem como objetivo melhorar uma solução inicial. Esta heurística é baseada no particionamento de variáveis de decisão do problema. Este particionamento pode ser feito de diferentes maneiras, tais como: particionamento por itens, períodos e processos. Em cada iteração as variáveis binárias que são liberadas para otimização são apenas as variáveis pertencentes a um subconjunto e as outras variáveis da partição são fixadas no valor da solução incumbente. Em cada iteração, resolvendo o subproblema, espera-se encontrar uma solução melhor que a solução incial. No problema abordado neste trabalho, as variáveis particionadas são as variáveis binárias de preparação, preparação *carryover* e preparação *crossover*. Faz-se partição por períodos em que o horizonte de planejamento é dividido em três janelas.

4 Resultados Computacionais

Nesta seção são combinadas a heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* e apresenta-se os resultados da heurística RF-FO, em que a FO usa como solução inicial a solução obtida pela RF.

A formulação e a heurística RF-FO foram implmentadas em AMPL usando o CPLEX 12.6.1.0 como solver e um computador Intel Core i7, 3.60GHz com 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 8.1. O tempo computacional para que o CPLEX resolva a formulação, para cada instância, foi limitado a 1800 segundos, e este tempo foi atingido em todas as instâncias resolvidas apresentadas nesta seção.

A Tabela 1 mostra os limitantes superiores (coluna LS_{RFFO}), o tempo computacional (coluna Tempo) da heurística RF-FO e na coluna $\%LS_{CPLEX}$, considerando como 100% o valor obtido pelo CPLEX, mostra-se as porcentagens dos valores obtidos pela heurística RF-FO que são calculadas relativas ao CPLEX, para os conjuntos de instâncias $G6-30$, $G12-30$ e $G24-30$, propostas em [8]. Note que as heurísticas foram bem mais rápidas que à formulação resolvida diretamente pelo CPLEX, que utilizou os 1800 segundos disponíveis. As soluções obtidas pela heurística apresentam uma diferença de no máximo $0,89\%$ com baixos tempos computacionais.

Tabela 1: Média dos limites superiores (LS_{RFFO}) e tempos computacionais (Tempo) usando a heurística RF-FO e porcentagens relativas à formulação resolvida diretamente pelo CPLEX ($\%LS_{CPLEX}$), para instâncias com 30 períodos do conjunto FeG.

	Formulação $F1$		
Instâncias	LS_{RFFO}	Tempo	$\%LS_{CPLEX}$
$G6-30$	53706,8	4,6	100,89
$G12-30$	128011,4	26,2	100,77
$G24-30$	254087,6	56,4	100,29

Trigeiro et al. [8] propuseram um conjunto maior composto de 540 instâncias. Dentre estas escolheu-se, para os resultados apresentados a seguir, 180 instâncias com custos e tempos de preparação altos. Na Tabela 2 apresenta-se os resultados (limites superiores e tempo computacional) das instâncias com tempos e custos de preparação altos, separados pela quantidade de itens, usando a heurística RF-FO e a porcentagem da heurística com respeito às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX (limitados a 1800 segundos), coluna $\%LS_{CPLEX}$. Para a formulação $F1$, novamente a heurística encontrou boas soluções com baixos tempos computacionais.

Tabela 2: Média dos limites superiores (LS_{RFFO}) e tempos computacionais (Tempo) usando a heurística RF-FO e porcentagens relativas à formulação resolvida diretamente pelo CPLEX ($\%LS_{CPLEX}$), para instâncias com tempos e custos de preparação altos separados pela quantidade de itens.

	Formulação $F1$		
Instâncias	LS_{RFFO}	Tempo	$\%LS_{CPLEX}$
10 itens	54936,5	148,1	100,47
20 itens	113423,6	114,4	100,35
30 itens	176733,8	103,4	100,19

5 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvida umaa heurística *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Otimize* (RF-FO). A RF consistiu em dividir o problema em subproblemas mais "fáceis" relaxando as variáveis binárias de preparação e foi utilizada para obter uma solução inicial. A FO particionou o problema ao longo de todo o horizonte de planejamento em busca de uma melhoria na solução. Os resultados computacionais da heurística mostraram que foi possível encontrar uma solução factível bastante próxima à obtida pela formulação, resolvidas diretamente pelo CPLEX, com tempos computacionais bem mais rápidos, pois o maior tempo computacional que usou a heurística para a formulação $F1$ foi aproximadamente 32 vezes mais rápido do que CPLEX. Foram realizados alguns testes adicionais em que o tempo computacional, utilizado pelo CPLEX para resolver a formulação, foi limitado ao mesmo tempo computacional da heurística e, neste caso, a heurística encontrou melhores soluções que o pacote.

Como propostas futuras pretende-se melhorar a heurística proposta, analisando outros tipos de decomposição. Novas instâncias devem ser geradas. Além disso, extensões do modelo podem ser analisadas, por exemplo, considerando tempos de preparação maiores que o período.

Referências

[1] M. A. F. Belo-Filho, B. Almada-Lobo, e F. M. B. Toledo, Models for Capacitated Lot-sizing problem with backlogging, setup carryover and crossover. *Journal of the Operational Research Society*, 65(11):1735-1747, 2014.

[2] D. J. Fiorotto, R. Jans, S. A. de Araujo, An Analysis of Formulations for the Capacitated Lot Sizing Problem with Setup Crossover. *Computers and Industrial Engineering*, 106:338-350, 2017.

[3] J. Krarup, e O. Bilde, O, Plant Location, set covering and economic lot size: An O(mn)-algorithm for structured problems. *Numerische Methoden bei Optimierung-*

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0373

saufgaben. Bang *3*: Optimierung bei Graphentheoritischen Ganzzahligen Problemen, 155-186, 1977.

[4] A. A. Menezes, A. R. Clark e B. Almada-Lobo, B, Capacitated Lot-sizing and Scheduling with sequence-dependent, period-overlapping and non-triangular setups. *Journal of Scheduling*, 14(2):209-219, 2010.

[5] S. Mohan, M. Gopalakrishnan, R. Marathe e A. Rajan, A note on modeling the capacitated Lot-sizing problem set-up carryover and set-up splitting. *International Journal of the Production Research*, 50(19):5538-5543, 2013.

[6] C. Suerie, Modeling of period overlapping setup times. *European Journal of Operational Research*, 174:874-886, 2006.

[7] C. Suerie, e H. Stadtler, The Capacitated Lot-sizing problem with linked lot sizes. *Management Science*, 49(8):1039-1054, 2003.

[8] W. W. Trigeiro, J. Thomas e J. O. McClain, Capacitated Lot-sizing with setup times. *Management Science*, 35:553-566, 1989.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0373