Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Abordagem direta para o Problema de Controle Ótimo de Pragas

Jônathas Douglas Santos de Oliveira[1]
Departamento de Física e Matemática - Cefet-MG, Belo Horizonte/MG
Luciana Takata Gomes[2]
Departamento de Física, Química e Matemática - UFSCar, Sorocaba/SP
Rodney Carlos Bassanezi[3]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas/SP.

Resumo. Uma das preocupações dos produtores rurais é a incidência de pragas nas lavouras. Elas costumam impedir o desenvolvimento das plantas e se não controladas, podem trazer muitos prejuízos. Propomos um modelo de controle ótimo de pragas através da inserção de inimigos naturais no ecossistema a fim de manter a população de pragas em um determinado limiar que não cause danos econômicos ao produtor. Resolvemos o problema de controle ótimo através de uma abordagem direta das condições de otimalidade do problema.
Palavras-chave. Pragas, Controle ótimo, bvp4.

1 Introdução

Existem diferentes maneiras de controlar a população de pragas em uma determindada lavoura. Podemos fazer o controle através da aplicação de inseticidas na cultura (controle químico) ou com a inserção de inimigos naturais (controle biológico) para atuar na predação dessas.

Apresentamos um modelo de controle ótimo biológico de pragas baseado no que foi proposto em [4], no qual procura-se minimizar o custo resultante da introdução de um inimigo natural à praga assim como a distância das populações a determinados valores desejados em um tempo ilimitado. No entanto, diferentemente de [4], consideramos o tempo final como um valor fixo, dado que infinito pressupõe que o agricultor possui um tempo ilimitado para realizar o controle e obter sua colheita, o que é irreal. Também obtivemos um avanço com à relação forma de resolução do problema de controle [4], que trabalhou com a linearização do sistema de equações diferenciais, pressupondo que a condição inicial está sempre próxima ao patamar desejado, fato que pode não acontecer . Desta maneira, evitamos uma simplificação do modelo, o que pode acarretar uma maior acurácia na solução encontrada.

[1]jonathas.math.oliveira@gmail.com
[2]lucianagomes.math@gmail.com
[3]rodney@ime.unicamp.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0449

2 Formulação do Problema

Usando como ideias iniciais o que foi desenvolvido em [4], de modo geral, podemos modelar as interações entre pragas e inimigos numa lavoura através de um modelo do tipo presa-predador:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xf(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= yg(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

onde $x(t)$ representa a densidade de presas (pragas) e $y(t)$ a densidade de predadores (inimigos naturais), em um tempo $t \geq 0$.

Em um agro-ecossitema a praga é uma presa e, geralmente, é conhecido um valor x_d de densidade de pragas que não causa danos econômicos na lavoura. Por exemplo, segundo dados da EMBRAPA (ver [4]), em um sistema lagarta de soja-predadores naturais, até 20 lagartas de soja adultas (com mais de 1,5 cm) por metro quadrado ou a densidade de 40 lagartas jovens (de 0,5 a 1,5 cm) por metro quadrado não causam danos econômicos a lavoura.

Suponhamos que precisamos manter o sistema no ponto de equilíbrio desejado (x^*, y^*) através da introdução de inimigos naturais. Podemos considerar $x^* = x_d$ e nesse caso podemos encontrar y^* resolvendo a equação

$$f(x^*, y^*) = 0.$$

O sistema com controle tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xf(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= yg(x,y) + u, \end{aligned} \tag{2}$$

com o controle u representando a quantidade de predadores que estão sendo inseridos a cada instante de tempo t.

A inserção de inimigos naturais gera um custo ao produtor, que deve ser minimizado e com isso, o funcional objetivo pode ser modelado como segue

$$J(u) = \int_0^{t_f} c_1 \left[(x(t) - x^*)^2 + (y(t) - y^*)^2 \right] + c_2 u(t)^2 dt \tag{3}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas que representam os pesos atribuídos a cada parcela .

Sendo assim, o problema de controle ótimo de pragas pode ser formulado da seguinte forma:

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0449

$$
\begin{aligned}
\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) &= \int_0^{t_f} c_1 \left[(x(t)-x^*)^2 + (y(t)-y^*)^2 \right] + c_2 u(t)^2 dt \\
\frac{dx}{dt} &= x f(x,y) \\
\frac{dy}{dt} &= y g(x,y) + u \\
x(t_0) &= x_0 \quad y(t_0) = y_0 \\
x(t_f) &= livre \quad y(t_f) = livre \\
u(t) &\geq 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

A minimização do funcional (4) implica a minimização do desvio do estado desejado e a minimização de gastos de inimigos naturais com a aplicação do controle.

3 Resolução do Problema

Para o nosso modelo utilizamos um sistema presa-predador, ou seja

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= a - \gamma x - \alpha y \\
g(x,y) &= -b + \beta x,
\end{aligned} \tag{5}
$$

onde $a, \gamma, \alpha, b, \beta$ são constantes positivas e representam, respectivamente, a taxa de crescimento efetiva da população das presas na ausência de predadores, a taxa de decréscimo através competição intraespecífica, a taxa de decréscimo da população de presas devido aos encontros com predadores, a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas, a taxa de crescimento populacional dos predadores devido à predação.

O Hamiltoniano do problema é dado por

$$
\begin{aligned}
H(t,x,u,p) &= c_1 \left[(x(t)-x^*)^2 + (y(t)-y^*)^2 \right] + c_2 u(t)^2 \\
&+ p_1(t) \left[a x(t) - \gamma x^2 - \alpha x y \right] + p_2(t) \left[-b y(t) + \beta x(t) y(t) + u(t) \right]
\end{aligned} \tag{6}
$$

Cujas condições de otimalidade são dadas por

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(a - \gamma x - \alpha y) \\
\frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x) + u \\
\frac{dp_1}{dt} &= -2c_1(x - x^*) - a p_1 + 2\gamma p_1 x + \alpha p_1 y - \beta p_2 y \\
\frac{dp_2}{dt} &= -2c_1(y - y^*) + \alpha p_1 x + b p_2 - \beta p_2 x \\
2c_2 u + p_2 &= 0 \\
x(0) &= 25 \quad y(0) = 5 \\
p_1(t_f) &= p_2(t_f) = 0 \\
u(t) &\geq 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

Note que podemos isolar u na equação $2c_2u + p_2 = 0$ e substituir em (7) e, com isso, obtemos um sistema de equações diferenciais nas variáveis x, y, p_1 e p_2, ou seja, em um problema de contorno com dois valores de fronteira

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(a - \gamma x - \alpha y)\\
\frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x) - \frac{p_2}{2c_2}\\
\frac{dp_1}{dt} &= -2c_1(x - x^*) - ap_1 + 2\gamma p_1 x + \alpha p_1 y - \beta p_2 y\\
\frac{dp_2}{dt} &= -2c_1(y - y^*) + \alpha p_1 x + bp_2 - \beta p_2 x \qquad (8)\\
x(0) &= 25 \quad y(0) = 5\\
p_1(t_f) &= p_2(t_f) = 0\\
u(t) &\geq 0.
\end{aligned}$$

4 Simulações

Para encontrarmos a solução númerica do sistema (8) usamos o pacote bvp4 do @MATLAB, que resolve sistema de equações diferenciais com dois valores de contorno a partir de um chute para a solução inicial. Utilizamos os parâmetros apresentados na tabela abaixo retirados de [4], referentes ao sistema lagarta da soja-inimigos naturais.

Tabela 1: Valores dos coeficientes e parâmetros para o modelo de controle de pragas.

x_0	y_0	a	γ	b	β	c_1	c_2	x^*	y^*
25	5	0, 16	0, 001	0, 19	0.0029	1	1	19	7.05

A figura a seguir mostra a evolução da densidade da população da população de presas e da população de predadores, sem a inserção do controle $u(t)$. Note que durante todo o processo da dinâmica, a densidade populacional de pragas sempre está acima do limiar desejado, o que se faz necessário uma intervenção por parte do produtor para controlar a quantidade de pragas, ou seja, se faz necessário a aplicação de um controle, no nosso caso, a inserção de inimigos naturais.

Para resolvermos o sistema de equações diferenciais (8), provenientes do problema de controle ótimo (4) , usando o pacote **bvp4**, precisamos de um bom chute para a solução inicial. Para isso, separamos esse sistema de equações diferencias em uma soma de sua parte linear com a sua parte não linear, conforme segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ -by - \frac{p_2}{2} \\ -2(x - x^*) - ap_1 \\ -2(y - y^*) + bp_2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -\gamma x^2 - \alpha xy \\ \beta xy \\ 2\gamma p_1 x + \alpha p_1 y - \beta p_2 y \\ \alpha p_1 x - \beta p_2 x \end{bmatrix}.$$

Resolvemos o sistema acima para os valores de $\delta = 0, 0.1, 0.25, 0.3, 0.31, 0.4, 0.41, 0.47, 0.5, 0.55$ e finalmente, para $\delta = 1$. Por exemplo, resolvemos o problema para $\delta = 0$ (não precisamos

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0449

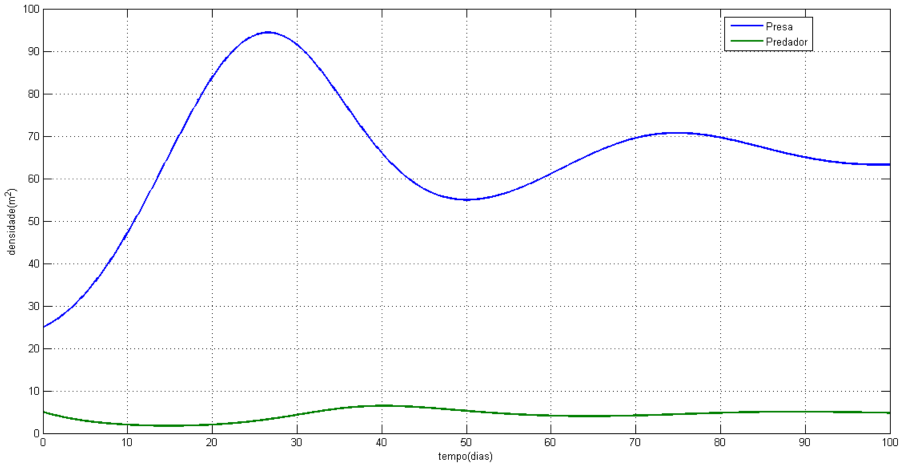


Figura 1: Variações das populações de pragas e predadores do sistema sem controle.

de um chute inicial pois o sistema é linear) e usamos a solução como chute inicial para o problema com $\delta = 0.1$, posteriormente, resolvemos o problema para $\delta = 0.1$ e usamos a solução encontrada como chute inicial para o problema com $\delta = 0.25$, e assim sucessivamente, até encontrarmos um chute inicial bom para resolvermos o problema com $\delta = 1$, que é o problema original que queremos resolver. A solução numérica pode ser visualizada nos gráficos a seguir.

Nota-se pelos resultados apresentados em forma de gráfico nas figuras 1 e 2, que a densidade de pragas (presas) sem inserção de controle tende a ser maior em mais de 30 unidades do que com o controle ótimo aplicado. Percebe-se que para tanto é necessário manter uma inserção quase constante de controle (predadores) ao longo do período considerado. Ademais pode-se perceber que há variações praticamente apenas no início e no fim do intervalo de tempo. O resultado é semelhante ao de [4], em que também há um pico na população de predadores no início do período de tempo e depois essa população tende a permanecer próxima ao valor 7.

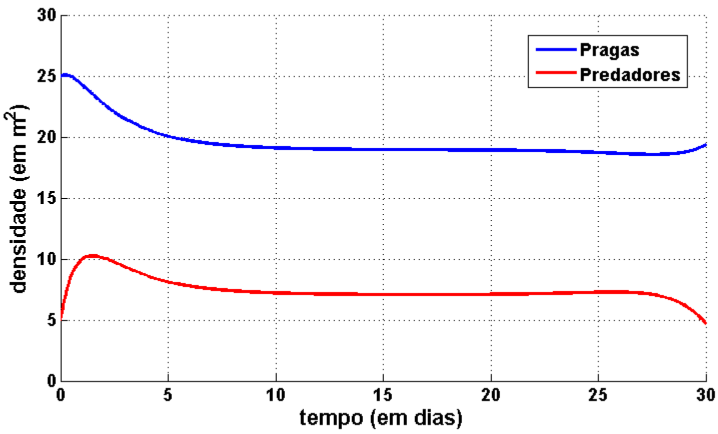
É importante ainda observar que, as condições de otimalidade dadas pelo sistema (8) são apenas condições necessárias de otimalidade e, com isso, a solução numérica que encontramos é apenas um candidato a mínimo. No entanto, se pudermos escrever o Hamiltoniano na forma

$$H(t,x,y,u,p_1,p_2) = f(t,x,y,p_1,p_2) + \left[c(t,x,y,p_1,p_2)\right]^t u + \frac{1}{2}u^t R(t) u$$

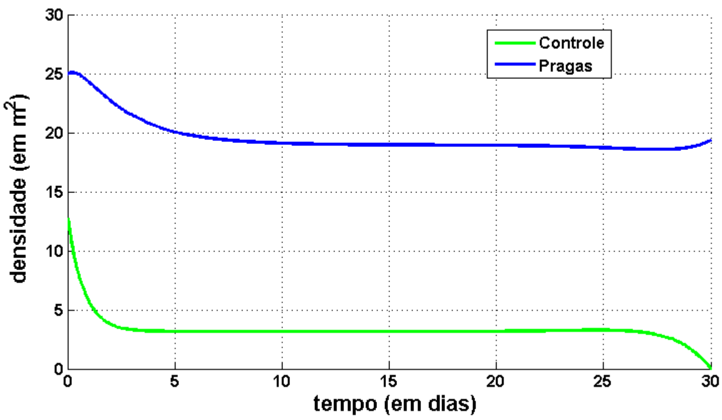
e $R(t)$ for uma matriz positiva definida, então o mínimo obtido através das condições de otimalidade é mínimo global (ver [3]). Note que no nosso caso

$$\begin{aligned} H(t,x,u,p) &= c_1\left[(x(t)-x^*)^2 + (y(t)-y^*)^2\right] + p_1(t)\left[ax(t) - \gamma x^2 - \alpha xy\right] \\ &+ p_2(t)\left[-by(t) + \beta x(t)y(t)\right] + p_2 u(t) + \frac{1}{2}u(t)^t 2c_2 u(t). \end{aligned} \tag{9}$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0449



(a) Variações das densidades de populações de pragas e predadores do sistema com controle.



(b) Variação da densidade do Controle e da população de pragas.

Figura 2: Solução numérica ao longo do tempo referente ao problema de controle ótimo proposto, com valores dos parâmetros dados pela Tabela 1.

Com isso, $R(t) = 2c_2 = 2 > 0$. Logo o candidato encontrado é mínimo global.

5 Conclusões e Trabalhos futuros

Durante todo o desenvolvimento deste trabalho apresentamos um modelo de controle biológico ótimo de pragas, resolvendo o problema através das condições de otimalidade , que, no nosso caso, se reduzia a um sistema de equações diferencias não-linear, com dois valores diferentes. A abordagem utilizada foi diferente da usada em [4], que resolveu o problema linearizando o sistema proveniente das condições de otimalidade.

Como extensão desse trabalho, pretentemos fazer a abordagem fuzzy do problema, usando as ideias desenvolvildas em [2], uma vez que a condição inicial e o patamar a ser atingido é "incerto" e com isso, podem ser modelados através de conjuntos fuzzy.

Referências

[1] R. C. Bassanezi, W. C. F. Junior. *Equações Diferenciais: com aplicações.* Harbra, 1988.

[2] M. M. Diniz. Otimização de Funções, Funcionais e Controle Fuzzy, UNICAMP-IMECC, 2016.

[3] D. E. Kirk. *Optimal control theory: an introduction.* Courier Corporation, 2012.

[4] A. M. Tusset, and M. Rafikov. Controle Ótimo de pragas: modelos linearizados, funcional quadrático. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, vol 5, n 1, pages 145-154, 2004.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0449