Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Otimização Baseada em Confiabilidade para a Minimização de Funções Matemáticas

Márcio Aurélio da Silva[1]
Aldemir Ap. Cavalini Jr[2]
Valder Steffen Jr[3]
Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil
Fran Sérgio Lobato[4]
Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil

Resumo. Nos últimos anos, inúmeros pesquisadores têm-se dedicado ao desenvolvimento de estratégias para o tratamento de problemas que apresentam incerteza, seja no modelo, no vetor de variáveis ou no vetor de parâmetros. Neste contexto, a presente contribuição tem por objetivo o desenvolvimento de uma estratégia para o tratamento de incertezas no vetor de variáveis de busca. A metodologia proposta consiste na associação do algoritmo de Evolução Diferencial com a técnica denominada como Análise de Confiabilidade Inversa. Os resultados obtidos com a aplicação em funções matemáticas demonstram que a metodologia proposta configura-se como uma alternativa interessante em relação às técnicas tradicionais que são empregadas para essa finalidade.

Palavras-chave. Otimização Baseada em Confiabilidade, Evolução Diferencial, Análise de Confiabilidade Inversa, Funções Matemáticas.

1 Introdução

Tradicionalmente, durante o processo de otimização considera-se que o valor da função objetivo não é influenciado por pequenas perturbações no vetor de variáveis de busca. Todavia, na prática, a implementação desse resultado pode ser sensível a pequenas perturbações, podendo implicar em desvios significativos no valor da função objetivo. Um exemplo prático dessa influência pode ser observado na manufatura de peças. Neste caso, apesar da precisão associada com este procedimento, os erros de produção são inerentes ao próprio processo, e estes podem influenciar o desempenho do projeto como um todo.

Para o tratamento deste tipo de problema, duas são as abordagens que têm sido empregadas, a saber, a otimização robusta e a otimização baseada em confiabilidade. Basicamente, define-se robustez como o processo de obtenção de uma solução que seja pouco sensível a pequenas perturbações do vetor de variáveis de busca [8]. Já a otimização

[1]marcioaureliosilva10@gmail.com
[2]aacjunior@ufu.br
[3]vsteffen@ufu.br
[4]fslobato@ufu.br

baseada em confiabilidade consiste na obtenção de uma solução, que sob determinadas condições (avaliação do coeficiente de confiabilidade), não viole uma ou mais restrições probabilísticas [2]. Embora estas duas abordagens tenham a mesma finalidade, são conceitualmente distintas. Por outro lado, ambas convergem para uma mesma desvantagem, a saber, requerem um número maior de avaliações da função objetivo em relação ao caso em que não se considera a influência de incertezas (ótimo determinístico ou nominal). Assim, obter uma solução considerando-se incerteza implica em mais avaliações da função objetivo [5].

Diante do que foi apresentado, a presente contribuição tem por objetivo propor uma metodologia para a resolução de problemas de otimização considerando incerteza no vetor de variáveis de busca. A metodologia proposta consiste na associação do algoritmo de Evolução Diferencial (ED) [7] com a técnica denominada como Análise de Confiabilidade Inversa (IRA - *Inverse Reliability Analysis*) [4]. Este trabalho está estruturado como segue: a seção 2 apresenta aspectos relacionados com a otimização baseada em confiabilidade; já nas seções 3 e 4 são apresentados, brevemente, a concepção do algoritmo de ED, bem como a descrição da metodologia para a inserção de confiabilidade considerada; os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta em funções matemáticas são apresentados na seção 5. Finalmente, as conclusões são comentadas na última seção.

2 Otimização Baseada em Confiabilidade

Como observado na Fig. 1, a solução de um problema de otimização determinístico é determinada pela ativação de uma ou mais restrições (equação de estado limite). Neste caso, qualquer perturbação no vetor solução (x_1 e x_2) pode resultar em uma solução inviável e com uma distribuição de probabilidade em torno da solução ótima.

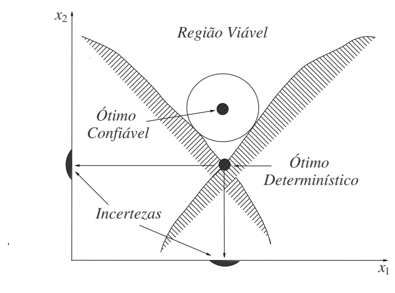

Figura 1: Otimização baseada em confiabilidade - concepção.

Conforme destacado por Deb *et al.* [3], obter uma solução confiável, isto é; associada a uma dada probabilidade, implica na penalização da solução determinística (nominal). A partir de uma dada medida de confiabilidade R, deseja-se encontrar uma solução viável que garanta que a probabilidade de ter uma solução inviável seja dada por 1-R. Matematicamente, este problema pode ser formulado como:

$$\min f(x_d, x_r) \tag{1}$$

$$P(G_j(x_d, x_r) \leq 0) \geq R_j, \quad j = 1, ..., n_g \tag{2}$$

$$x^l_{d_i} \leq x_d \leq x^u_{d_i}, \quad i = 1, ..., n_d, \quad x_{rk}, \quad k = 1, ..., n_r \tag{3}$$

em que f e G_j representam a função objetivo e as restrições, respectivamente, x_d é o vetor de variáveis de busca (valores determinísticos associados aos limites superiores x^l_{di} e inferiores x^u_{di}), x_r é o vetor de variáveis aleatórias, n_g é o número de restrições probabilísticas, n_d é o número de variáveis de busca, n_r é o número de variáveis aleatórias, e R_j é a confiabilidade desejada. P é a probabilidade de G_j ser menor ou igual a zero (G_j=0 indica falha). A probabilidade de falha pode ser definida por uma função de distribuição cumulativa, isto é:

$$P(G_j(x_d, x_r) \leq 0) = \int ... \int_{G_j \leq 0} f_X(x_r) dx_r \tag{4}$$

em que f_X é uma função de densidade de probabilidade conjunta.

A integral dada pela Eq.(4) deve ser avaliada ao longo do espaço de busca definido pelas restrições de desigualdade para determinar a probabilidade de falha P. A avaliação analítica (ou numérica) desta integral é uma tarefa complexa devido ao domínio. Para superar esta dificuldade, o problema original, definido em termos das variáveis aleatórias x_r, pode ser reescrito em termos de um novo conjunto de variáveis aleatórias (u) usando a transformação de Rosenblatt [6]. Nesta abordagem, considerando o novo espaço de busca (em termos do vetor u), o ponto mais provável para a falha é encontrado localizando a distância mínima entre a origem e o estado limite (ou a função de restrição), que é definida pelo coeficiente de confiabilidade β. Assim, a restrição probabilística pode ser expressa através de uma transformação inversa, dada pela Eq.(5).

$$P(G_j(x_d, x_r, x_p) \leq 0) = \Phi(\beta) \tag{5}$$

onde Φ é a função de distribuição normal padrão. Esta transformação é utilizada para mensurar a confiabilidade associada e evitar a avaliação da integral da Eq.(4).

As técnicas para a avaliação das restrições probabilísticas podem ser classificadas em quatro categorias [3, 5]: *i*) métodos de simulação; *ii*) métodos de laço duplo; *iii*) métodos desacoplados; e *iv*) métodos de laço simples. Na presente contribuição, para a avaliação das restrições probabilísticas será apresentada a técnica proposta por Du [4] e denominada como Análise de Confiabilidade Inversa (IRA - *Inverse Reliability Analysis*). Esta abordagem consiste na formulação de um problema inverso para a análise de confiabilidade, isto é, a partir da definição da confiabilidade (R) ou do coeficiente de confiabilidade (β), obtêm-se o ponto mais provável para a falha. Para aplicar esta abordagem, o vetor de variáveis aleatórias x_r é reescrito em termos do vetor u. Em linhas gerais, o procedimento para a determinação do ponto mais provável de falha (u) é descrito como segue [4]: *i*) parâmetros de entrada (u^0=0, β e o tipo de distribuição, *ii*) faz-se a avaliação de $G_j(u^k)$ e $\nabla G_j(u^k)$ para k=0 e calcule-se a usando a seguinte relação:

$$a^k = \frac{\nabla G_j(u^k)}{\|\nabla G_j(u^k)\|} \tag{6}$$

iii) atualiza-se $u^{k+1} = -\beta a^k$ e k=k+1, e *iv*) repete-se este procedimento (passos *ii* e *iii*) até que a convergência seja alcançada.

3 Algoritmo de Evolução Diferencial

Nas últimas décadas, inúmeras técnicas de otimização tem sido propostas. Dentre estas, destaca-se o algoritmo de ED [7] como umas das mais utilizadas para essa finalidade. Em termos gerais, neste algoritmo heurístico a geração de um candidato à solução do problema de otimização é obtida a partir da realização de operações vetoriais. Basicamente, a partir da geração de uma população com NP candidatos, seleciona-se dois destes (candidatos distintos) para a realização de uma subtração. Esta subtração é ponderada por uma constante F (taxa de perturbação), e é adicionada a um outro indivíduo (distinto dos outros dois) de modo que este seja perturbado. O indivíduo gerado através deste esquema é avaliado segundo a função objetivo sendo que, a partir da avaliação de uma probabilidade de cruzamento (CR), este pode substituir um outro na geração corrente. Este procedimento é repetido até que uma nova população seja gerada e até o número máximo de gerações ser alcançado (critério de parada *default*).

4 Metodologia

A metodologia proposta neste trabalho e denominada como ED+IRA é baseada em um processo de iteração de laço duplo. No laço externo, o algoritmo de ED é aplicado para determinar o valor das variáveis de busca. No laço interno, o procedimento IRA é executado para encontrar o vetor u para cada um dos candidatos gerados pelo algoritmo de ED. Em linhas gerais, o procedimento adotado neste trabalho pode ser resumido como segue: *i*) parâmetros de entrada (função objetivo, restrições, número de variáveis de busca, índice de confiabilidade, tipo de distribuição e os parâmetros do algoritmo de ED - tamanho da população, número de gerações, taxa de perturbação, probabilidade de cruzamento e a estratégia para a geração de candidatos); *ii*) Laço externo: a população de candidatos é gerada usando o algoritmo de ED (apenas o vetor de variáveis determinísticas (x_d) é gerado); *iii*) Laço interno: para cada candidato, o procedimento IRA é aplicado para determinar o valor de cada restrição de desigualdade através do cálculo do vetor de variáveis aleatórias u e, consequentemente, x_r; *iv*) os valores de x_d e x_r são utilizados para avaliar a função objetivo e as restrições (realizado pelo Método da Função Penalidade [5]); *v*) o processo iterativo é repetido até alcançar a convergência.

5 Resultados e Discussão

Para a avaliação da metodologia proposta são considerados dois estudos de caso. Para essa finalidade são considerados os seguintes parâmetros: ED (10 indivíduos; 100 gerações; taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento iguais a 0,8; estratégia DE/rand/1/bin para a geração de candidatos potenciais [7] e número máximo de gerações como critério de parada; considera-se u=0 na primeira iteração do IRA, e norma euclidiana menor que $1{,}0\times10^{-5}$ como critério de parada; as derivadas de G_j foram obtidas analiticamente; e todos os estudos de caso foram executados 10 vezes para obter os valores médios apresentados a seguir.

5.1 Estado Limite Altamente Não-Linear

O primeiro estudo de caso foi proposto e resolvido por Aoues e Chateauneuf [1] e consiste da otimização da seguinte função matemática:

$$\min_{x_d} x_{d1}^2 + x_{d2}^2 \tag{7}$$

$$P(0,2x_{d1}x_{d2}x_{r2}^2 - x_{r1} \leq 0) \geq R, \;\; 0 \leq x_{di} \leq 15, \;\; i = 1,2 \tag{8}$$

Este problema contém duas variáveis de projeto (x_{d1} e x_{d2}) e duas variáveis aleatórias (x_{r1} e x_{r2}), que são normalmente distribuídas com médias iguais a 5 e 3, respectivamente. Os coeficientes de variação são iguais a 0,3 para ambas as variáveis. A confiabilidade (R) é igual a 98,9830% (β=2,32). Aoues e Chateauneuf [1] analisaram este problema considerando o par (x_{d1}, x_{d2})=(12, 12) como estimativa inicial e as seguintes abordagens: *Reliability Index Approach* (RIA) (não convergiu), *Performance Measure Approach* (PMA) (f=3,67 e 210 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) (não convergiu), *Single Loop Approach* (SLA) (f=3,67 e 60 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) (f=3,67 e 136 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) (não convergiu). Na Tab. 1 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade β.

Tabela 1: Resultados obtidos considerando diferentes estratégias para resolver o problema do Estado Limite Altamente Não-Linear.

R% (β)	f - Eq.(7)	x_{d1}	x_{d2}	$n_{eval}{}^{(1)}$
97,7250 (2)	2,7869$^{(1)}$/1,4×10$^{-4(2)}$	1,1805$^{(1)}$/2,4×10$^{-4(2)}$	1,1804$^{(1)}$/1,7×10$^{-4(2)}$	13340
98,9830 (2,32)	3,6532/1,3×10^{-4}	1,3512/4,7×10^{-4}	1,3518)/2,3×10^{-4}	13052
99,3791 (2,5)	4,4275/1,4×10^{-4}	1,4860/2,7×10^{-4}	1,4897/1,3×10^{-4}	11814
99,5339 (2,6)	5,0196/1,7×10^{-4}	1,5844/1,3×10^{-4}	1,5840/2,8×10^{-4}	11834
99,6534 (2,7)	5,7969/1,5×10^{-4}	1,7025/3,5×10^{-4}	1,7024/1,1×10^{-4}	11840
99,7445 (2,8)	6,8634/1,4×10^{-4}	1,8491/2,4×10^{-4}	1,8558/1,3×10^{-4}	11564
99,8135 (2,9)	8,4207/1,3×10^{-4}	2,0726/1,3×10^{-4}	2,0310/1,4×10^{-4}	11732

$^{(1)}$Média e $^{(2)}$Desvio Padrão.

Nesta tabela observa-se que a metodologia proposta foi capaz de encontrar um valor melhor para f em relação a outras abordagens considerando β igual a 2,32. Além disso, em todas as execuções do algoritmo proposto, a metodologia sempre convergiu para a solução, diferentemente de algumas abordagens consideradas por Aoues e Chateauneuf [1], que não convergiram. Como observado nesta tabela, o aumento do parâmetro β implica na deterioração do valor da função objetivo. Este resultado era esperado, já que uma solução mais confiável significa que a restrição, em relação a um determinado valor de β, não corre o risco de ser violada.

5.2 Problema com Múltiplas Restrições

O próximo exemplo consiste de um sistema com três restrições probabilísticas. Matematicamente, este pode ser descrito como [1]:

$$\min\ d_1 + d_2 \tag{9}$$

sujeito à:

$$P(X_1^2 X_2/20 - 1 \leq 0) \leq R \tag{10}$$

$$P((X_1 + X_2 - 5)^2/30 + (X_1 - X_2 - 12)^2/120 - 1 \leq 0) \leq R \tag{11}$$

$$P(80/(X_1^2 + 8X_2 + 5) - 1 \leq 0) \leq R \tag{12}$$

em que d_1 e d_2 são as médias das variáveis X_1 e X_2, respectivamente. As variáveis apresentam coeficientes de variação iguais a 0,3 e distribuição normal.

Aoues e Chateauneuf [1] resolveram este problema considerando diferentes valores para β (2, 3 e 4) e condição inicial dada por (x_{d1}, x_{d2})=(5, 5). Os autores obtiveram os seguintes resultados para β=2: *Reliability Index Approach* (RIA) (f=6,1923 e 560 avaliações da função objetivo), *Performance Measure Approach* (PMA) (f=6,1923 e 612 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) (f=6,1923 e 756 avaliações da função objetivo), *Single Loop Approach* (SLA) (f=6,1920 e 144 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) (f=6,1923 e 348 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) (f=6,1926 e 240 avaliações da função objetivo). A Tab. 2 apresentada os resultados obtidos pela metodologia proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade β.

Tabela 2: Resultados obtidos considerando diferentes estratégias para resolver o problema com múltiplas restrições.

R% (β)	f - Eq.(9)	x_{d1}	x_{d2}	n_{eval} (1)
84,1344 (1)	3,1835/2,1×10^{-5}	2,4902/2,9×10^{-5}	5,6737/1,7×10^{-5}	15234
93,3193 (1,5)	3,2347/1,1×10^{-5}	2,6962/2,7×10^{-5}	5,9308/1,2×10^{-5}	15076
97,7250 (2)	3,2950/1,3×10^{-5}	2,8972/2,7×10^{-5}	6,1924/4,2×10^{-5}	14564
99,3791 (2,5)	3,3634/2,6×10^{-5}	3,0942/1,3×10^{-5}	6,4576/2,2×10^{-5}	13987
99,8651 (3)	3,4391/4,7×10^{-5}	3,2866/1,4×10^{-5}	6,7257/2,1×10^{-5}	14949
99,9768 (3,5)	3,5213/5,1×10^{-5}	3,4750/4,1×10^{-5}	6,9962/3,3×10^{-5}	14454
99,9969 (4)	3,6090/3,2×10^{-5}	3,6594/6,1×10^{-5}	7,2683/1,8×10^{-5}	15034
99,9997 (4.5)	3,7018/4,3×10^{-5}	3,8399/3,2×10^{-5}	7,5418/1,2×10^{-5}	15374
99,9999 (5)	3,7991/2,1×10^{-5}	4,0171/2,3×10^{-5}	7,8162/2,4×10^{-5}	14348

(1) Média e (2) Desvio Padrão.

Assim como no estudo de caso anterior, nesta tabela é possível observar que a metodologia proposta foi capaz de encontrar a solução ótima (em termos de média e desvio padrão) em relação a outras abordagens considerando β igual a 2. Além disso, como mencionado anteriormente, o aumento do parâmetro β implica na deterioração do valor da função objetivo.

6 Conclusões

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de uma estratégia para o tratamento de problemas que apresentam incerteza. A metodologia proposta consiste da associação do algoritmo de Evolução Diferencial com a técnica de Análise de Confiabilidade Inversa. Com os resultados obtidos foi possível concluir que a metodologia proposta foi capaz de obter os mesmos resultados obtidos por outras metodologias. Em termos do número de avaliações da função objetivo, observa-se que um aumento significativo desde número ao utilizar o algoritmo proposto quando comparado com outras abordagens. Esse resultado era esperado devido à natureza da técnica de otimização considerada, isto é, foi usada uma técnica heurística baseada em população, levando naturalmente ao aumento do número de avaliações da função objetivo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, a FAPEMIG e a CAPES pelo suporte financeiro. O terceiro autor agradece o suporte financeiro através da FAPEMIG e do CNPq (INCT-EIE).

Referências

[1] Aoues, Y., Chateauneuf, A. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41:277–294, 2009.

[2] A.D.S. Carter. Mechanical Reliability and Design, New York, Wiley, 1997.

[3] K. Deb, D. Padmanabhan, S. Gupta, A.K. Mall. Handling uncertainties through reliability-based optimization using evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(5):1054–1074, 2009.

[4] X. Du. Probabilistic Engineering Design - First Order and Second Reliability Methods. University of Missouri-Rolla, 2005.

[5] F.S. Lobato, M.S. Gonçalves, B. Jahn, A.Ap. Cavalini Jr, V. Steffen Jr. Reliability-Based Optimization Using Differential Evolution and Inverse Reliability Analysis for Engineering System Design. *Journal of Optimization Theory and Applications*, doi:10.1007/s10957-017-1063-x., 2017.

[6] M. Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23:470–472, 1952.

[7] R. Storn and K. Price. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11:341–359, 2007.

[8] G. Taguchi. *Quality Engineering through Design Optimization.* Kraus International Publications, New York, 1984.

