Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Algoritmo de Ponto Proximal Inexato para Programação Multiobjetivo

Rogério Azevedo Rocha[1]
Curso de Ciênca da Computação, UFT, Palmas, TO
Ronaldo Malheiros Gregório[2]
Departamento de Tecnologia e Linguagens, UFRRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Consideramos o problema de otimização multiobjetivo de encontrar pontos Pareto fraco para aplicações convexas $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Para este problema, propomos uma versão inexata do algoritmo de ponto proximal vetorial de Rocha et al.. Mostramos que qualquer sequência gerada pela versão inexata é limitada e que seus pontos de acumulação são soluções Pareto fraco para o problema.

Palavras-chave. Algoritmo de Ponto Proximal, Otimização Multiobjetivo, Solução Pareto Fraco, Quase-distância

1 Introdução

O clássico algoritmo de ponto proximal (APP) para otimizar uma função convexa de valor escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ foi originalmente introduzido por Martinet [5] e desenvolvido e estudado por Rockafellar [11]. Este APP gera uma sequência $\{x^k\}$ via o seguinte procedimento iterativo: Dado um ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$,

$$x^{k+1} \in \operatorname{argmin}\{f(x) + \lambda_k \|x - x^k\|^2 \ \ | \ \ x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{1}$$

onde λ_k é uma sequência de números reais positivos e $\|.\|$ é a norma usual.

Em recentes décadas a análise de convergência deste APP tem sido amplamente estudada e consequentemente surgiram, na literatura, inúmeras generalizações/variações deste APP para diversas classes de problemas, dentre as quais, destacamos a otimização multiobjetivo/vetorial. Dentre os trabalhos existentes na literatura, que envolvem o APP aplicado a problemas multiobjetivo, citamos: Bonnel et al. [2] e Rocha et al. [9, 10].

Rocha et al [10] desenvolveram um APP aplicado à problemas de otimização multiobjectivo irrestrito e convexo. Uma de suas principais contribuições foi a introdução da aplicação quase-distância nos subproblemas regularizados do APP, que possui importantes aplicações em teoria da computação [3] e economia [8], entre outras. Sob certas hipóteses

[1]azevedo@uft.edu.br
[2]rgregor@ufrrj.br

razoáveis, mostraram a convergência do APP para soluções Pareto fraco e, devido a importância das soluções Pareto para as aplicações, exibiram uma classe de sequências que são geradas pelo algoritmo e que convergem para solução Pareto (em vez de Pareto fraco).

Neste trabalho, propomos uma versão inexata do algoritmo proximal de Rocha et al. [10]. Segundo Rockafellar [11], a importância das versões inexatas é que, para que um APP seja prático é importante que ele funcione com soluções aproximadas dos subproblemas.

Na seção 2 apresentamos conceitos e resultados relacionados a aplicação quase-distância, teoria do subdiferencial e programação multiobjetivo. Na seção 3, apresentamos nosso algoritmo proximal onde asseguramos a existência das iteradas e a convergência para soluções Pareto fraco.

2 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos algumas Definições e Proposições básicas para a prova do nosso principal resultado.

Definição 2.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^m$ vetores.* ***(a)*** $x \leq y \iff x_i \leq y_i, \forall i = 1, .., m$; ***(b)*** $x \ll y \iff x_i < y_i, \forall i = 1, .., m$; ***(c)*** $x < y \iff x_i \leq y_i, \forall i = 1, .., m$, *com a desigualdade estrita assegurada para pelo menos um índice.*

Considere uma aplicação convexa $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e o seguinte problema de otimização multiobjetivo (POM)

$$\text{MINIMIZE } \{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2}$$

Definição 2.2. ***(a)*** *$a \in \mathbb{R}^n$ é uma solução Pareto para o problema (2) se não existe $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $G(x) < G(a)$;* ***(b)*** *$a \in \mathbb{R}^n$ é uma solução Pareto fraco para o problema (2) se não existe $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $G(x) \ll G(a)$.*

Denotaremos por $\text{argmin}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ e $\text{argmin}_w\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ o conjunto solução Pareto e o conjunto solução Pareto fraco para o problema (2), respectivamente. É fácil conferir que: $\text{argmin}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \text{argmin}_w\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Observação 2.1. *(Huang and Yang [4]) Dada uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, considere o POM*

$$\textit{MINIMIZE}\{exp(G(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{3}$$

onde $exp(G(x)) = (exp(G_1(x)), \ldots, exp(G_m(x)))$. Então, os conjuntos soluções Pareto fraco dos problemas (2) e (3) são os mesmos. Portanto, sem perda de generalidades, podemos assumir, que para todo $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, $\langle G(x), \bar{z}\rangle > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Obserque também que a convexidade do problema (2) implica na convexidade do problema (3).

Definição 2.3. *Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e $x \in \mathbb{R}^n$.*

1. *O subdiferencial Fréchet de h em $x \in \mathbb{R}^n, \hat{\partial} h(x)$, é definido como segue:*

$$\hat{\partial} h(x) := \begin{cases} \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \liminf\limits_{y \neq x, y \to x} \dfrac{h(y) - h(x) - \langle x^*, y - x\rangle}{\|x - y\|} \geq 0 \right\}, & se\ x \in dom(h) \\ \emptyset, & se\ x \notin dom(h) \end{cases}$$

2. O subdiferencial-limite de h em $x \in \mathbb{R}^n, \partial h(x)$, é definido como segue:

$$\partial h(x) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \exists x_n \to x, \quad h(x_n) \to h(x), \quad x_n^* \in \hat{\partial} h(x_n) \to x^* \right\}$$

Observação 2.2. ***a)*** *Se $\bar{x} \in dom(h)$, então os conjuntos $\hat{\partial} h(\bar{x})$ e $\partial h(\bar{x})$ são fechados, com $\hat{\partial} h(\bar{x})$ convexo e $\hat{\partial} h(x) \subset \partial h(x)$; e* ***b)*** *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se uma função própria $h : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possui um mínimo local em $\bar{x} \in C$, então $0 \in \hat{\partial}(h + \delta_C)(\bar{x}), 0 \in \partial(h + \delta_C)(\bar{x})$, onde $\delta_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é a função indicadora de C.*

Definição 2.4. *Uma aplicação $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ é dita ser uma quase-distância se, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,*

($\mathcal{A}$1) $q(x, y) = q(y, x) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *e* *($\mathcal{A}$2)* $q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z)$.

Observação 2.3. ***a)*** *Se q é simétrica , isto é, se para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, $q(x, y) = q(y, x)$, então q é uma distância;* ***b)*** *Uma quase-distância não necessariamente é uma função convexa, nem continuamente diferenciável, e nem mesmo uma função coerciva em nenhum de seus argumentos (conf. [8, Observações 3 e 4]).*

A seguinte Proposição providência uma classe de quase-distâncias que são localmente Lipschitz contínuas e coercivas em qualquer um de seus argumentos.

Proposição 2.1. *Seja $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância. Suponha que existem constantes positivias α e β tal que*

$$\alpha \|x - y\| \leq q(x, y) \leq \beta \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Então, para cada $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $q(\bar{z}, .)$ e $q(., \bar{z})$ são funções Lipschitz contínuas sobre $\mathbb{R}^n$, $q^2(\bar{z}, .)$ e $q^2(., \bar{z})$ são funções localmente Lipschitz contínuas sobre $\mathbb{R}^n$ e $q(\bar{z}, .)$, $q(., \bar{z})$, $q^2(\bar{z}, .)$ e, $q^2(., \bar{z})$ são funções coercivas.

Demonstração. Conferir [8, Proposição 3.6 e 3.7 e Observação 5]. □

Observação 2.4. *A classe de quase-distâncias não simétricas que satisfazem a propriedade (4) da Proposição anterior é não vazia. Conferir [8, Seção 3.1].*

Proposição 2.2. *Considere $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ fixados e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância satisfazendo (4). Então existe $M > 0$, que não depende de $\bar{u}$ e $\bar{v}$, tal que $\|x^*\| \leq M$ para todo $x^* \in \partial \left(q(., \bar{v}) \right) (\bar{u})$.*

Demonstração. Conferir [10, Proposição 2.3]. □

3 Algoritmo Proximal

Nesta seção, propomos um APP inexato com quase-distância, denotado por Algoritmo 1, para resolver o problema de otimização multiobjetivo irrestrito (POMI)

$$\text{MINIMIZE } \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{5}$$

onde $F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação convexa, i.e., $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa, para todos $i \in \{1, ..., m\}$. A sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é gerada como segue:

Algoritmo 1

1. Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
2. Dado x^k, se $x^k \in \operatorname{argmin}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, então $x^{k+p} = x^k, \forall p \geq 1$.
3. Dado x^k, se $x^k \notin \operatorname{argmin}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, então tome como x^{k+1} qualquer vetor $x \in \Omega^k$ tal que existe $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

$$0 \in \partial_{\varepsilon_k}(\langle F(.), z^k \rangle)(x) + \beta_k q(x, x^k) \partial(q(., x^k))(x) + N_{\Omega^k}(x), \tag{6}$$

$$q^2(x, x^k) \leq \bar{c} \, \|F(x) - F(x^k)\| \quad \text{and} \quad \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0. \tag{7}$$

onde $\partial_{\varepsilon_k}(\langle F(.), z^k \rangle)(x)$ é a ε_k-subdiferencial da função convexa $\langle F(.), z^k \rangle$ no ponto x, $N_{\Omega^k}(x)$ é o cone normal no ponto x em relação ao conjunto Ω^k, $0 < m < \beta_k < M$, $\{z^k\} \subset \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$; $\|z^k\|_1 = 1$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^*_+$ e $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$.

Observação 3.1. ***a)*** *Se $\{x^k\}$ for uma sequência gerada pelo algoritmo 1, então $\Omega^k \supseteq \Omega^{k+1}$, $\forall k$. Assim, $x^k \in \Omega^{k-1} \subseteq \Omega^0, \forall k \geqslant 1$. Portanto, Ω^0 limitado implica $\{x^k\}$ limitada,* ***b)*** *Se F possui uma de suas componentes coercivas, então Ω^0 é limitado ([9, Lema 4.1]).*

Em seguida, vamos enunciar e provar o nosso principal resultado de convergência.

Teorema 3.1. *Considere $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ convexa e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância que satisfaz a condição (4). Suponha que o conjunto Ω^0 seja limitado. Assim, se $\{x^k\}$ for uma sequência gerada pelo algoritmo 1, então $\{x^k\}$ é limitada e qualquer ponto de acumulação desta sequência é uma solução Pareto fraco para o POMI (5).*

Demonstração. Dividimos a demonstração do Teorema em três etapas.
Etapa 1: Boa definição do algoritmo (Existência das iteradas). $x^0 \in \mathbb{R}^n$ é escolhido na etapa de inicialização. Supondo que o algoritmo atingiu a iteração k, vamos mostrar que um apropriado x^{k+1} existe. Pelo critério de parada, se $x^k \in \operatorname{argmin}_w \{F(x), \ x \in \mathbb{R}^n\}$ então $x^{k+p} = x^k$, $\forall p \geq 1$. Por outro lado, defina $\varphi^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi^k(x) = \langle F(x), z^k \rangle + \frac{\beta_k}{2} q^2(x, x^k)$. A convexidade de F em $\mathbb{R}^n$ implica na convexidade de $\left\langle F(.), z^k \right\rangle$ em $\mathbb{R}^n$ e então que $\left\langle F(.), z^k \right\rangle$ é uma aplicação contínua em $\mathbb{R}^n$. Pela proposição 2.1, $q^2(., x^k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ é uma aplicação contínua. Logo, $\varphi^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua em $\mathbb{R}^n$. Desde que F é convexa em $\mathbb{R}^n$, $\Omega^k \supseteq \Omega^{k+1}, \forall k$ e Ω^0 é limitado (hipótese), temos que o conjunto $\Omega^k, \forall k$ é convexo e compacto. Portanto, o conjunto $\operatorname{argmin}\{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$ é não vazio.

Seja $x^{k+1} \in$ argmin$\{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$. Então, pela observação 2.2,

$$0 \in \partial(\langle F(.), z^k\rangle + \frac{\beta_k}{2}\, q^2(., x^k) + \delta_{\Omega^k})(x^{k+1}). \tag{8}$$

Desde que $\langle F(.), z^k\rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa, $\langle F(.), z^k\rangle$ é localmente Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$; pela proposição 2.1, $\frac{\beta_k}{2} q^2(., x^k)$ é localmente Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$; Ω^k fechado implica que δ_{Ω^k} é semi-contínua inferiormente (conf. [12, page 11]). Então, usando o Teorema 2.33 de [6] in (8), obtemos

$$0 \in \partial(\langle F(.), z^k\rangle)(x^{k+1}) + \partial(\frac{\beta_k}{2} q^2(., x^k))(x^{k+1}) + \partial(\delta_{\Omega^k})(x^{k+1}). \tag{9}$$

Desde que Ω^k é convexo e $x^{k+1} \in \Omega^k$ temos $\partial\left(\delta_{\Omega^k}\right)(x^{k+1}) = N_{\Omega^k}(x^{k+1})$, onde $N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ denota o cone normal no ponto x^{k+1} em relação ao conjunto Ω^k. Pela proposição 2.1, $q(., x^k)$ é Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$. Portanto, como $q(x, y) \geq 0$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tomando $\varphi_1 = \varphi_2 = q(., x^k)$ no Teorema 7.1 de [7], obtemos $\partial\left(\frac{\beta_k}{2} q^2(., x^k)\right)(x^{k+1}) = \beta_k q(x^{k+1}, x^k)\partial\left(q(., x^k)\right)(x^{k+1})$, e então de (9),

$$0 \in \partial\left(\langle F(.), z^k\rangle\right)(x^{k+1}) + \beta_k q(x^{k+1}, x^k)\partial\left(q(., x^k)\right)(x^{k+1}) + N_{\Omega^k}(x^{k+1}).$$

Assim, desde que $\partial f(x) = \partial_0 f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$ para toda função convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, x^{k+1} satisfaz (6) para $\varepsilon_k \equiv 0$. Como $x^{k+1} \in$ argmin$\{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$ e $x^k \in \Omega^k; \forall k$, $\varphi^k(x^{k+1}) \leq \varphi^k(x^k); \forall k$. Portanto, desde que $q(x^k, x^k) = 0$, temos

$$\langle F(x^{k+1}), z^k\rangle + \frac{\beta_k}{2}\, q^2(x^{k+1}, x^k) \leq \langle F(x^k), z^k\rangle.$$

Então, como $0 < m < \beta_k$, $\|z^k\| \;\leq\; \|z^k\|_1$ e $\|z^k\|_1 = 1$, temos

$$0 \leq q^2(x^{k+1}, x^k) \;\leq\; \frac{2}{m}\langle F(x^k) - F(x^{k+1}), z^k\rangle \;\leq\; \frac{2}{m}\|F(x^k) - F(x^{k+1})\|.$$

Portantanto x^{k+1} satisfies (6) and (7).

Etapa 2: Propriedades. Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 1. Temos:
(a) $\{x^k\}$ é limitada; **(b)** $\forall z \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}, \{\langle F(x^k), z\rangle\}_{k\in N}$ é não crescente e convergente; **(c)** $\lim\limits_{k\to\infty} \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\| = 0$; **(d)** $\lim\limits_{k\to\infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0$; **(e)** $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

De fato: **(a)** Desde que $\Omega^k \supseteq \Omega^{k+1}, k = 0, 1, ...$, temos $x^k \in \Omega^{k-1} \subseteq \Omega^0$, $\forall k \geq 1$. Então, como Ω^0 é limitado (por hipótese), temos $\{x^k\}$ limitada.

(b) Desde que $F(x^{k+1}) \leq F(x^k)$ $(x^{k+1} \in \Omega^k)$ e $z \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ temos:

$$\left\langle F(x^{k+1}), z\right\rangle \leq \left\langle F(x^k), z\right\rangle \;\; \forall k \in \mathbb{N},$$

i.e., $\left\{\left\langle F(x^k), z\right\rangle\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente. Pela observação 2.1, $\left\{\left\langle F(x^k), z\right\rangle\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e portanto convergente.

(c) Seja $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_{++}$ fixado. Por (b), $\left\{\left\langle F(x^k), \bar{z}\right\rangle\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Então,

$$\lim_{k\to\infty} \langle F(x^k) - F(x^{k+1}), \bar{z}\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (F_i(x^k) - F_i(x^{k+1}))\bar{z}_i = 0. \tag{10}$$

Como $x^{k+1} \in \Omega^k$, temos $F(x^{k+1}) \leq F(x^k)$, i.e., $F_i(x^{k+1}) \leq F_i(x^k)$, $\forall i = 1, ..., m$. Então $(F_i(x^k) - F_i(x^{k+1}))\bar{z}_i \geq 0$, $\forall i = 1, ..., m$. Logo, de (10),

$$\lim_{k\to\infty}(F_i(x^k)-F_i(x^{k+1}))\bar{z}_i=0,\ \forall i=1,...,m.$$

Desde que $\bar{z}_i>0, i=1,...,m$, temos $\lim\limits_{k\to\infty}(F_i(x^k)-F_i(x^{k+1}))=0,\ \forall i=1,...,m$, e então $\lim\limits_{k\to\infty}(F(x^k)-F(x^{k+1}))=0\in\mathbb{R}^m$. Portanto $\lim\limits_{k\to\infty}\|F(x^{k+1})-F(x^k)\|=0$.
(d) Por (7), $q^2(x^{k+1},x^k)\le\bar{c}\ \|F(x^{k+1})-F(x^k)\|$. Assim, desde que $q(x,y)\ge 0$, o resultado segue do item (c).
(e) De (4), $0\le\alpha\|x^{k+1}-x^k\|\le q(x^{k+1},x^k),\ \forall k\in N$. Portanto, o resultado é uma consequência do item anterior.
Etapa 3: Convergência para Pareto fraco. Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 1. Pela etapa 2 (item a), existem $x^*\in\mathbb{R}^n$ e $\{x^{k_j}\}_{j\in N}$, uma subsequência de $\{x^k\}$, tal que $\lim_{j\to\infty}x^{k_j}=x^*$. Como $\|z^k\|_1=1,\forall k\in N$, existem $\bar{z}\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{0\}$ e $\{z^{k_l}\}_{l\in N}$, uma subsequência de $\{z^k\}$, tal que $\lim_{l\to\infty}z^{k_l}=\bar{z}$. Fixe $z\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{0\}$. A Convexidade da aplicação $\langle F(.),z\rangle$ em $\mathbb{R}^n$ implica em sua continuidade. Pela etapa 2(b), $\forall\ z\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{0\}$; $\big\{\big\langle F(x^k),z\big\rangle\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente e convergente. Portanto, $\forall z\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{0\}$; $\lim_{j\to\infty}\langle F(x^{k_j}),z\rangle=\langle F(x^*),z\rangle=\ \inf_{k\in N}\{\langle F(x^k),z\rangle\}$. Então,

$$\langle F(x^*),z\rangle\le\langle F(x^k),z\rangle,\ \forall z\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{0\}\ \text{ and } k\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Por (6), existem $\zeta^{k_l+1}\in\partial(q(.,x^{k_l}))(x^{k_l+1})$ e $v^{k_l+1}\in N_{\Omega^{k_l}}(x^{k_l+1})$, tal que

$$-\beta_{k_l}q(x^{k_l+1},x^{k_l})\zeta^{k_l+1}-v^{k_l+1}\in\partial_{\varepsilon_{k_l}}(\langle F(.),z^{k_l}\rangle)(x^{k_l+1}).$$

Assim, pela desigualdade do ε_{k_l}-subgradiente para a função convexa $\langle F(.),z^{k_l}\rangle$ temos: $\forall x\in\mathbb{R}^n$,

$$\langle F(x),z^{k_l}\rangle\ge\langle F(x^{k_l+1}),z^{k_l}\rangle-\beta_{k_l}q(x^{k_l+1},x^{k_l})\langle\zeta^{k_l+1},x-x^{k_l+1}\rangle-\langle v^{k_l+1},x-x^{k_l+1}\rangle-\varepsilon_{k_l}.$$

Como $v^{k_l+1}\in N_{\Omega^{k_l}}(x^{k_l+1})$, temos $-\langle v^{k_l+1},x-x^{k_l+1}\rangle\ \ge\ 0\ \forall x\in\Omega^{k_l}$. Por $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$, $\Omega^k,\forall k\in\mathbb{N}$ é um conjunto compacto. Portanto, como $\Omega^{k+1}\subseteq\Omega^k,\forall k\in\mathbb{N}$ temos $\Omega=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\Omega^k\ne\emptyset$. Logo, em particular,

$$\langle F(x),z^{k_l}\rangle\ge\langle F(x^{k_l+1}),z^{k_l}\rangle-\beta_{k_l}q(x^{k_l+1},x^{k_l})\langle\zeta^{k_l+1},x-x^{k_l+1}\rangle-\varepsilon_{k_l},\ \forall x\in\Omega. \tag{12}$$

De (11), $\langle F(x^{k_l+1}),z^{k_l}\rangle\ge\big\langle F(x^*),z^{k_l}\big\rangle$. Então, de (12),

$$\langle F(x),z^{k_l}\rangle\ge\langle F(x^*),z^{k_l}\rangle-\beta_{k_l}q(x^{k_l+1},x^{k_l})<\zeta^{k_l+1},x-x^{k_l+1}>-\varepsilon_{k_l},\ \forall x\in\Omega. \tag{13}$$

Pela proposição 2.2, $\|\zeta^{k_l+1}\|\le M$. Portanto, como as sequências $\{x^k\}$ e $\{\beta_k\}$ são limitadas, utilizando a desigualdade de Cauchy-Swartz, concluímos que $|\ \beta_{k_j}<\zeta^{k_l+1},x-x^{k_l+1}>|\le M_1$. Logo, desde que pela etapa 2 item d), $\lim\limits_{k\to\infty}q(x^{k+1},x^k)=0$, temos

$$|\ \beta_{k_l}q(x^{k_l+1},x^{k_l})<\zeta^{k_l+1},x-x^{k_l+1}>|\to 0\quad\text{quando}\quad l\to\infty.$$

Portanto, recordando que $\lim_{l\to\infty}z^{k_l}=\bar{z}$, from (13)

$$\langle F(x),\bar{z}\rangle\ge\langle F(x^*),\bar{z}\rangle,\ \forall x\in\Omega. \tag{14}$$

Vamos demonstrar que $x^* \in \operatorname{argmin}_w\{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Suponha, por contradição, que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(\bar{x}) \ll F(x^*). \tag{15}$$

Como $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ temos:

$$\langle F(\bar{x}), \bar{z}\rangle < \langle F(x^*), \bar{z}\rangle. \tag{16}$$

Desde que, $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k$, $\forall k \geq 0$ e $x^{k_j} \in \Omega^{k_j - 1}$, $\forall j$ com $x^{k_j} \to x^*$; $j \to \infty$, temos $x^* \in \Omega$, i.e., $F(x^*) \leq F(x^k), \forall k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (15), $F(\bar{x}) \ll F(x^k), \forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $\bar{x} \in \Omega$, que contradiz (14) e (16). $\square$

4 Conclusões

Propomos uma versão inexata do algoritmo proximal (AP) de Rocha et al. [10] que resolve problemas de otimização multiobjetivo convexo e irrestrito. Baseados em resultados de análise convexa e programação multiobjetivo e em técnicas avançadas de análise variacional não convexa e diferenciação generalizada, desenvolvemos uma completa análise de convergência do APP inexato para soluções Pareto fraco.

Como pesquisas futuras, pretendemos investigar a convergência do algoritmo para soluções Pareto (em vez de Pareto fraco) e propor uma implementação do algoritmo e assim, testa-lo através de diversos exemplos numéricos.

Referências

[1] G. C. Bento, J. X. Cruz Neto, A. Soubeyran, *A Proximal Point-Type Method for Multicriteria Optimization*, Set-Valued Var. Anal, 22: 557-573, 2014.

[2] H. Bonnel, A.N. Iusem, B.F. Svaiter, *Proximal methods in vector optimization*, SIAM Journal on Optimization, 15: 953-970, 2005 .

[3] V. Brattka, *Recursive quasi-metric spaces*, Theoretical Computer Science, 305: 17-42, 2003.

[4] X.X. Huang, X.Q. Yang, *Duality for multiobjective optimization via nonlinear Lagrangian functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 120: 111-127, 2004.

[5] B. Martinet, *Régularization d'inéquations variationelles par approximations successives*, Revue Fracaise d'informatique et Recherche Operationelle, 4: 154-159, 1970.

[6] B.S. Mordukhovich. Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Springer, Berlin, 2006.

[7] B.S. Mordukhovich, Y. Shao, *Nonsmooth sequential analysis in asplund spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, 348: 1235-1280, 1996.

[8] F.G. Moreno, P.R. Oliveira, A. Soubeyran, *A proximal algorithm with quasi distance. Application to habit's formation*, Optimization, 61: 1383-1403, 2012.

[9] R.A.Rocha, P.R.Oliveira, R.M.Gregório, M.Souza, *Logarithmic quasi-distance proximal point scalarization method for multi-objective programming*, Applied Mathematics and computation, 273: 856-867, 2016.

[10] R.A.Rocha, P.R.Oliveira, R.M.Gregório, M.Souza, *A proximal point algorithm with quasi-distance in multi-objective optimization*, J. Optim. Theory Appl, 171: 964-979, 2016.

[11] R.T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM Journal of Control and Optimization, 14: 877-898, 1976.

[12] R.T. Rockafellar, R.J-B Wets. Variational Analysis. Springer, Berlin, 1998.

