

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estratégias de restauração inexata aplicadas a problemas de otimização com restrições de Pareto

Roberto Andreani¹

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

Sandra A. Santos²

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

Leonardo D. Secchin³

Departamento de Matemática Aplicada, UFES, São Mateus, ES

Resumo. Problemas de dois níveis são conhecidos por descreverem situações onde há uma hierarquia entre dois interesses. Neste trabalho, são tratados aqueles cujo nível inferior visa atender vários objetivos distintos, consistindo em um problema multiobjetivo. Estratégias de restauração inexata [1], que tiram proveito da estrutura original de minimização do segundo nível, são aplicadas ao modelo. Testes computacionais indicam que a abordagem é promissora, mostrando-se como uma alternativa à reformulações do problema em um único nível.

Palavras-chave. problemas de dois níveis, restauração inexata, problemas multiobjetivo.

1 Introdução

Neste trabalho, lidamos com problemas de dois níveis nos quais, no nível inferior, temos um problema multiobjetivo. Mais especificamente, o problema de interesse é formulado como

$$P: \min_x F(x) \quad \text{s.a.} \quad x \in \mathcal{X}^*$$

onde $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathcal{X}^* é o conjunto Pareto do problema multiobjetivo

$$\min (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad \text{s.a.} \quad h(x) = 0, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

com $f_1, \dots, f_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Assumimos que todas as funções são de classe C^2 . Reformulando (1) via pesos, podemos reescrever P como o problema de dois níveis

$$\begin{aligned} & \min_{w,x} F(x) \\ & \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^p w_i = 1, \quad \varepsilon \leq w_i \leq 1 - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, p \\ & \quad \quad x \in \operatorname{argmin} \{ \sum_{i=1}^p w_i f_i(x); \quad h(x) = 0, \quad x \geq 0 \}. \end{aligned} \quad (2)$$

¹andreani@ime.unicamp.br

²sandra@ime.unicamp.br

³leonardo.secchin@ufes.br

Esta reformulação depende do parâmetro $\varepsilon > 0$, que garante que todos os objetivos f_i 's desempenham seu papel no processo de otimização.

Uma estratégia recorrente na literatura para lidar com o modelo (2) é substituir o problema do nível inferior por suas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Porém, essa abordagem não leva em consideração a estrutura de minimização do problema do nível inferior. Por outro lado, estratégias de Restauração Inexata (RI) tiram proveito dessa minimização [1] (fase de restauração). Conseqüentemente, podemos esperar melhores soluções para (2). Ainda assim, pontos KKT indesejáveis do nível inferior podem ser obtidos (veja o Exemplo 2.1). A fim de contornar este inconveniente, sugerimos neste trabalho uma estratégia de RI com perturbações nas restrições do nível inferior.

O texto está organizado como segue. Na Seção 2 apresentamos resumidamente as estratégias de RI para (2). Testes numéricos são apresentados na Seção 3 e, por fim, as conclusões, na Seção 4.

Notação. O símbolo $\|\cdot\|$ denotará a norma Euclidiana, enquanto que $\|\cdot\|_\infty$, a norma do supremo. $\text{diag}(z)$ é a matriz diagonal formada pelas entradas do vetor z .

2 Restauração Inexata (RI) para problemas de dois níveis

As condições KKT para o segundo nível de (2), problema parametrizado em w , são

$$C_0(w, x, \mu, \gamma) = 0, \quad x \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (3)$$

onde

$$C_\xi(w, x, \mu, \gamma) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p w_i \nabla_x f_i(x) + \nabla_x h(x) \mu - \gamma \\ h(x) \\ \mathbf{\Gamma X} - \mathbf{I} \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} \quad (4)$$

para $\xi \geq 0$ e $(\mu, \gamma) \in \Delta \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$ (Δ é o conjunto de multiplicadores do nível inferior), $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma)$ e $\mathbf{X} = \text{diag}(x)$. Definimos

$$L_\xi(w, x, \mu, \gamma, \lambda) = F(x) + C_\xi(w, x, \mu, \gamma)^T \lambda$$

para $\lambda \in \mathbb{R}^{2n+m}$ e $\xi \geq 0$. Escrevemos $s = (w, x, \mu, \gamma) \in \Omega \times \Delta$ onde $\Omega = \{(w, x); \sum w_i = 1, \varepsilon \leq w_i \leq 1 - \varepsilon, \forall i\}$. Denotaremos por $C'_\xi(s)$ a Jacobiana de C_ξ no ponto s .

Resumimos abaixo o método de RI descrito em [1] para P. Os parâmetros $\eta > 0$, $M > 0$, $\theta_{-1} \in (0, 1)$, $\delta_{\min} > 0$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ são dados, assim como as aproximações iniciais $s^0 \in \Omega \times \Delta$, $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{2n+m}$, e uma sequência $\{\omega^k\}$ tal que $\sum_{k=0}^\infty \omega^k < \infty$. Os passos para obtermos $s^{k+1} = (w^{k+1}, x^{k+1}, \mu^{k+1}, \gamma^{k+1})$ e λ^{k+1} são dados a seguir.

Algoritmo 2.1. Restauração Inexata para P

1. Defina $\theta_k^{\min} = \min\{1, \theta_{k-1}, \dots, \theta_{-1}\}$, $\theta_k^{\text{large}} = \min\{1, \theta_k^{\min} + \omega^k\}$ e $\theta_{k,-1} = \theta_k^{\text{large}}$.
2. **(Fase de restauração)** Encontre um minimizador $\bar{x} \geq 0$ e multiplicadores $(\bar{\mu}, \bar{\gamma}) \in \Delta$ aproximados para o problema do segundo nível de (2). Defina $z^k = (w^k, \bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\gamma})$.

3. **(Direção tangente)** Calcule

$$d_{\text{tan}}^k = P_k[z^k - \eta \nabla_s L_0(z^k, \lambda^k)] - z^k$$

onde $P_k[\cdot]$ é a projeção ortogonal sobre $\pi_k = \{s \in \Omega \times \Delta; C_0'(z^k)(s - z^k) = 0\}$ (a projeção é única se $\Omega \times \Delta$ é convexo). Se $z^k = s^k$ e $d_{\text{tan}}^k = 0$, pare e retorne x^k como solução de P. Caso contrário, faça $i \leftarrow 0$, escolha $\delta_{k,0} \geq \delta_{\min}$ e continue.

4. **(Fase de minimização)** Se $d_{\text{tan}}^k = 0$ tome $v^{k,i} = z^k$. Caso contrário, tome $t_{\text{break}}^{k,i} = \min\{1, \delta_{k,i}/\|d_{\text{tan}}^k\|\}$ e encontre $v^{k,i} \in \pi_k$ tal que, para algum $0 < t \leq t_{\text{break}}^{k,i}$, tenhamos

$$L_0(v^{k,i}, \lambda^k) \leq \max\{L_0(z^k + t d_{\text{tan}}^k, \lambda^k), L_0(z^k, \lambda^k) - \tau_1 \delta_{k,i}, L_0(z^k, \lambda^k) - \tau_2\} \quad (5)$$

com $\gamma \geq 0$ (γ de $v^{k,i}$) e $\|v^{k,i} - z^k\|_\infty \leq \delta_{k,i}$.

5. Se $d_{\text{tan}}^k = 0$ defina $\lambda^{k,i} = \lambda^k$. Caso contrário, tome $\lambda^{k,i} \in \mathbb{R}^{2n+m}$ tal que $\|\lambda^{k,i}\|_\infty \leq M$.

6. Para todo $\theta \in [0, 1]$, seja $Pred_{k,i}(\theta)$ definido pela expressão

$$\theta \left[L_0(s^k, \lambda^k) - L_0(v^{k,i}, \lambda^k) - C_0(z^k)^T(\lambda^{k,i} - \lambda^k) \right] + (1 - \theta) \left[\|C_0(s^k)\| - \|C_0(z^k)\| \right].$$

Tome $Pred_{k,i} = Pred_{k,i}(\theta_{k,i})$ onde $\theta_{k,i}$ é o máximo $\theta \in [0, \theta_{k,i-1}]$ que satisfaz $Pred_{k,i}(\theta) \geq \frac{1}{2} [\|C_0(s^k)\| - \|C_0(z^k)\|]$.

7. Calcule

$$Ared_{k,i} = \theta_{k,i} \left[L_0(s^k, \lambda^k) - L_0(v^{k,i}, \lambda^{k,i}) \right] + (1 - \theta_{k,i}) \left[\|C_0(s^k)\| - \|C_0(v^{k,i})\| \right].$$

Se $Ared_{k,i} \geq 0.1 Pred_{k,i}$ faça $s^{k+1} = v^{k,i}$, $\lambda^{k+1} = \lambda^{k,i}$, $\theta_k = \theta_{k,i}$, $\delta_k = \delta_{k,i}$, $Ared_k = Ared_{k,i}$, $Pred_k = Pred_{k,i}$ e termine a iteração corrente k . Caso contrário, escolha $\delta_{k,i+1} \in [0.1\delta_{k,i}, 0.9\delta_{k,i}]$, faça $i \leftarrow i + 1$ e vá para o passo 4.

2.1 Uma versão perturbada de RI

Comentamos anteriormente que a estratégia de RI explora a minimização do nível inferior, e logo, possivelmente, obtém melhores soluções do que a reformulação KKT. Mesmo assim, em situações muito específicas e na presença de restrições de desigualdade, o Algoritmo 2.1 pode obter um máximo local do segundo nível, uma situação indesejada para o problema de dois níveis. O próximo exemplo ilustra uma situação com tal perfil.

Exemplo 2.1. Consideremos o problema bidimensional

$$\min F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.a.} \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^*, \quad (6)$$

onde \mathcal{X}^* é o conjunto Pareto de

$$\min (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad \text{s.a.} \quad (2/5)x_1 + x_2 \leq 2, \quad 5x_1 - x_2 \leq 10, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad (7)$$

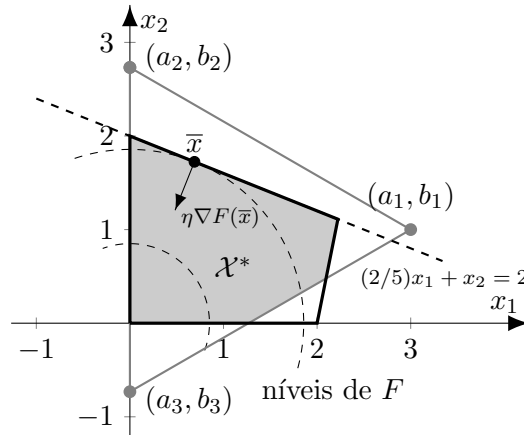


Figura 1: Geometria para o Exemplo 2.1. O ponto KKT \bar{x} é indesejável para (6).

e, para cada $1 \leq i \leq p$,

$$f_i(x_1, x_2) = (x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2,$$

$a_i = 1 + 2 \cos \theta_i$, $b_i = 1 + 2 \sin \theta_i$ e $\theta_i = [2\pi/p](i - 1)$. Analisemos o caso $p = 3$, onde $a = (3, 0, 0)^T$ e $b = (1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})^T$. O conjunto Pareto \mathcal{X}^* é a interseção da envoltória convexa dos pontos (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3$, com a região delimitada pelas restrições do segundo nível (7) (veja Figura 1). Portanto, a origem é o único minimizador global de (6).

Adicionando as variáveis de folga x_3 e x_4 nas restrições de (7), obtemos a versão dois níveis por pesos (2). É fácil mostrar que o ponto $\bar{x} = (20/29, 50/29, 0, 240/29)^T$ é KKT do segundo nível para w viáveis (isto é, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ e $w_1, w_2, w_3 \geq \epsilon$) tais que

$$15w_1 - 2\sqrt{3}w_2 + 2\sqrt{3}w_3 = 2, \quad w_1 \neq 20/87, \quad (8)$$

e que o multiplicador $\bar{\gamma}_3$ associado à restrição $x_3 \geq 0$ é positivo. Esse sistema admite solução para todo $\epsilon < 20/87 \approx 0.23$. Tomemos então um $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ viável satisfazendo (8), e mostremos que o Algoritmo 2.1 pode convergir a \bar{x} , um ponto indesejável para o problema (6) (veja a Figura 1). De fato, sejam $(\bar{\mu}, \bar{\gamma})$ os multiplicadores associados a \bar{x} . Denotemos $\bar{z} = (\bar{w}, \bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\gamma})$. Iniciando o Algoritmo 2.1 com $s^0 = \bar{z}$ e $\lambda^0 = 0$, podemos assumir que o passo 2 fornece $z^0 = \bar{z}$. Do passo 3, temos $\bar{\gamma}_3 x_3 = 0$, o que implica $x_3 = 0$. Assim, a projeção de π_0 no espaço de x é a reta $(2/5)x_1 + x_2 = 2$ (veja a Figura 1). É fácil verificar que $\nabla_x F(\bar{x})$ é ortogonal à essa reta, e logo $d_{\text{tan}}^0 = P_0[\bar{z} - \eta \nabla_s L_0(\bar{z}, \lambda^0)] - \bar{z} = P_0[\bar{z} - \eta \nabla_s F(\bar{x})] - \bar{z} = 0$. Ou seja, o Algoritmo 2.1 termina declarando \bar{x} como solução de (6). \square

No exemplo anterior, se nós “balancearmos” a complementariedade requerendo $\gamma_i x_i = \xi > 0$, o ponto corrente x estará no interior da região viável do segundo nível, evitando que o Algoritmo 2.1 convirja a \bar{x} . Evidentemente, ξ deve ir a zero de modo a recuperar o sistema KKT. Nós chamaremos essa estratégia de *restauração inexata perturbada*, e

é inspirada em métodos de pontos interiores. Mais especificamente, na iteração $k \geq 1$ fazemos, para todo i , $\gamma_i^k x_i^k = \xi^k$ onde

$$\xi^k = \min \left\{ \tilde{\xi}^k, \xi_{\max}, \xi_{\text{dec}} \cdot \xi^{k-1} \right\}, \quad \tilde{\xi}^k = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\gamma^{k-1} \cdot x^{k-1}}{n} \right), \quad (9)$$

$\xi_{\max} > 0$ é a perturbação máxima e $\xi_{\text{dec}} \in (0, 1)$ é um parâmetro que garante decréscimo a cada iteração. Definimos ainda $\xi^0 = \xi_{\max}$. A expressão (9) se mostrou numericamente adequada aos nossos testes, e foi inspirada em resultados de [3]. A fase de restauração do Algoritmo 2.1 consiste agora na resolução de

$$C_{\xi^k}(w^k, x, \mu, \gamma) = 0, \quad x \geq 0, \quad \gamma \geq 0. \quad (10)$$

Como $C'_{\xi^k} = C'_0$, o problema do passo 3 permanece o mesmo, enquanto que os passos 4 a 7 são adaptados de maneira natural. Uma solução de (10) pode ser recuperada se o valor ótimo de

$$\begin{aligned} \min_{x, \mu, \gamma} \quad & \left\| \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla_x f_i(x) + \nabla_x h(x) \mu - \gamma \right\|^2 \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0, \quad x, \gamma \geq 0, \quad x_i \gamma_i = \xi^k, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

for zero. Caso não seja possível, procedemos com um ponto estacionário deste problema.

O critério de convergência ($z^k = s^k$ e $d_{\text{tan}}^k = 0$) pode não ser suficiente na estratégia perturbada. De fato, devemos garantir que ao fim do processo a perturbação seja “zero”, apesar de não observarmos término do algoritmo com perturbação positiva em nossos testes. De qualquer forma, modificamos o passo 3 para reduzir a perturbação, caso necessário, da seguinte forma: no caso inusitado $z^k = s^k$, $d_{\text{tan}}^k = 0$ e $\xi^k > 0$, encerramos a iteração corrente k , fazemos $\xi^{k+1} = \xi_{\text{dec}} \cdot \xi^k$ e voltamos ao passo 2.

Como vimos, a estratégia perturbada é obtida por pequenas modificações no Algoritmo 2.1. Portanto, a boa definição e resultados de convergência teórica das estratégias de RI apresentadas podem ser obtidas de maneira análoga ao feito em [1, 5].

3 Testes computacionais

Para resolução dos subproblemas da fase de restauração (incluindo (11)) e para o cálculo de projeções, utilizamos o método de programação quadrática sequencial (SQP) regularizado implementado no pacote WORHP [2]. WORHP emprega uma técnica de globalização baseada em busca linear com uso de função de mérito tipo Lagrangiana aumentada. Os (sub)problemas quadráticos em WORHP são resolvidos por um método de pontos interiores, cujas Hessianas são obtidas por atualizações BFGS.

Consideramos a condição $d_{\text{tan}}^k = 0$ no passo 4 do Algoritmo 2.1 satisfeita se $\|d_{\text{tan}}^k\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\text{opt}}$ para uma tolerância $\varepsilon_{\text{opt}} > 0$ dada. Se esta condição não ocorre, devemos calcular $v^{k,i} \in \pi_k$ satisfazendo (5). Para tanto, resolvemos, via WORHP, o problema

$$\min_{v=(w,x,\mu,\gamma)} L_{\xi^k}(v, \lambda^k) \quad \text{s.a.} \quad C'_{\xi^k}(z^k)(v - z^k) = 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (w, x) \in \Omega, \quad \|v - z^k\|_{\infty} \leq \delta_{k,i}.$$

Um ponto estacionário deste problema é potencialmente um bom candidato a $v^{k,i}$. Se sua resolução falhar ou se sua solução não satisfizer (5), realizamos *backtracking* ao longo da direção de descida (para L_{ξ^k} , a partir de (z^k, λ^k)) d_{\tan}^k .

Comparamos as duas estratégias de RI com a reformulação KKT, que consiste no problema de um nível obtido ao substituir o problema do segundo nível pelas suas condições KKT. No último caso, o problema resultante é um caso especial de problemas com restrições de complementariedade, para os quais os métodos SQP são adequados [4]. Portanto, são resolvidos com o pacote WORHP.

Utilizamos um computador com processador Intel(R) i7-6600U 2.60Ghz, 8Gb RAM, e sistema operacional GNU/Linux Ubuntu 64 bits. Grande parte do código foi escrito em Fortran 90, e outra pequena parte em linguagem C, especialmente a interface AMPL. Para as estratégias de RI fixamos a tolerância para otimalidade $\varepsilon_{\text{opt}} = 10^{-4}$ e os parâmetros $\eta = 0.1$, $\theta_{-1} = 0.5$, $r = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $M = 10^{16}$, $\delta_{\text{min}} = \varepsilon_{\text{opt}}/2$, $\tau_1 = 10^{-2}$, $\tau_2 = 10^{-3}$, $\omega^k = 1/k^2$, $\lambda^0 = 0$, $\xi_{\text{max}} = 10^{-2}$ e $\xi_{\text{dec}} = 0.8$. Em WORHP fixamos $\varepsilon_{\text{SQP}} = 10^{-6}$ como tolerância para otimalidade. Inicializamos o passo 3 com $\delta_{k,0} = 10$ (cf. [1]) e no passo 7 fazemos $\delta_{k,i+1} = \delta_{k,i}/2$.

A Tabela 1 resume os resultados obtidos para diferentes problemas da literatura. Podemos observar que a estratégia de restauração inexata atinge melhores soluções do que a reformulação KKT, como já comentamos. Mais ainda, o método de programação quadrática sequencial não atingiu pontos KKT do nível inferior em três instâncias. Isso deve-se, possivelmente, ao elevado grau de dificuldade na resolução de problemas com restrições de complementariedade (estes possuem alto grau de degeneração [4]). Neste sentido, a RI evita tais dificuldades, pois resolve o problema do segundo nível original. Por fim, a estratégia de perturbação melhorou os resultados em 6 problemas, inclusive em uma instância do Exemplo 2.1. Para uma única instância do Problema 13, a versão perturbada teve comportamento pior do que o Algoritmo 2.1.

4 Conclusões

Neste trabalho discutimos a aplicação de estratégias de restauração inexata a problemas de dois níveis cujo segundo nível consiste em um problema multiobjetivo. Tais estratégias mostram-se promissoras frente à tradicional maneira de lidar com problemas de dois níveis, isto é, aquela obtida pela reformulação KKT do problema do nível inferior. Testes mais completos e uma análise mais aprofundada são objeto de trabalhos futuros.

Referências

- [1] R. Andreani, S. L. C. Castro, J. L. Chela, A. Friedlander, e S. A. Santos. An inexact-restoration method for nonlinear bilevel programming problems, *Computational Optimization and Applications*, 43:307–328, 2009. DOI:10.1007/s10589-007-9147-4.
- [2] C. Büskens e D. Wassel, The ESA NLP Solver WORHP, *Modeling and Optimization in Space Engineering*, Springer Optimization and Its Applications, volume 73, capítulo 8, páginas 85–110, 2013. DOI:10.1007/978-1-4614-4469-5_4.

Tabela 1: Testes computacionais. Características dos problemas e valores funcionais atingidos usando cada estratégia: em negrito, **os melhores**; em itálico, *os que atingiram o valor ótimo*. O símbolo “*” indica que o método não encontrou um ponto KKT do segundo nível.

Problema	(p, n)	$x^0; w^0$	RI	RI perturb.	KKT
F3 [7]	(2,2)	(10, 10); (0.5, 0.5)	6.32e+00	7.21e+00	2.25e+02
TNK [8]	(2,2)	(10, 10); (0.5, 0.5)	1.10e+00	1.08e+00	*
Prob 10 [6]	(2,2)	(-2, 20); (0.8, 0.2)	1.06e-14	2.12e-15	4.82e-30
	(2,2)	(-10, 10); (0.4, 0.6)	1.92e-12	2.99e-08	3.15e-14
Prob 11 [6]	(2,2)	(-10, 10); (0.5, 0.5)	2.00e+00	1.44e-20	2.00e+00
	(2,2)	(-10, 10); (0.4, 0.6)	2.00e+00	2.40e-01	2.00e+00
Prob 12 [6]	(2,2)	(-10, 10); (0.5, 0.5)	2.00e+00	5.01e-01	1.44e+00
	(2,2)	(40, 100); (0.1, 0.9)	5.01e-01	5.01e-01	1.44e+00
Prob 13 [6]	(2,2)	(-10, 10); (0.5, 0.5)	3.32e-06	4.92e-01	7.07e+02
	(2,2)	(10, 20); (0.23, 0.77)	3.25e-06	3.26e-06	*
Ex. 2.1	(3,2)	(10, 10); (0.2, 0.3, 0.5)	9.00e-08	9.03e-08	4.00e+00
	(3,2)	(0.68, 1.72); (0.3, 0.6, 0.1)	3.45e+00	1.52e-06	4.00e+00
	(6,2)	(-10, -10); $w_i^0 = 1/6$	3.55e-12	1.66e-24	4.00e+00
	(100,2)	(0.9, 0.9); $w_i^0 = 1/100$	1.21e-09	1.66e-24	*

- [3] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya, e Y. Zhang. On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89:507–541, 1996. DOI:10.1007/BF02275347.
- [4] R. Fletcher e S. Leyffer. Solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs. *Optimization Methods and Software*, 19:15–40, 2004. DOI:10.1080/10556780410001654241.
- [5] J. M. Martínez. Inexact-restoration method with Lagrangian tangent decrease and new merit function for nonlinear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3:39–58, 2001. DOI:10.1023/A:1017567113614.
- [6] V. A. Ramirez, Reformulação de um problema de programação não linear com restrições multiobjetivo, Tese de Doutorado, IMECC/Unicamp, 2015.
- [7] N. Srinivas e K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2:221–248, 1994. DOI:10.1162/evco.1994.2.3.221.
- [8] M. Tanaka, H. Watanabe, Y. Furukawa, e T. Tanino. GA-based decision support system for multicriteria optimization. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Intelligent Systems for the 21st Century*, Vancouver, Canadá, 1995. DOI:10.1109/ICSMC.1995.537993.