

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Análise Temporal e Espectral de Sinais Gerados por um Mapa Tenda Generalizado

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisenkraft<sup>1</sup>

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

### 1 Introdução

Em aplicações práticas de sistemas não lineares e sinais caóticos é de fundamental importância estudar as características temporais e espectrais desses sinais. Recentemente, alguns progressos foram obtidos na determinação da Sequência de Autocorrelação (SAC) e da Densidade Espectral de Potência (DEP) para uma família de mapas lineares por partes com duas inclinações, o mapa tenda inclinada [3] e o mapa de Bernoulli [1]. Feltekh et al. [4] deduziram expressões analíticas para SAC e DEP para uma família de mapas com três segmentos. Em [2] estudou-se mapas lineares com  $r$  segmentos com inclinações positivas. Porém, esses últimos resultados não admitem os mapas tenda inclinada e o analisado em [4] como casos particulares.

No presente trabalho, obtém-se a SAC e a DEP das órbitas de um mapa para o qual os apresentados em [1–4] são casos particulares. Esse mapa é constituído por  $r$  segmentos com inclinações positivas ou negativas.

### 2 O mapa estudado e resultados

Sejam  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$ . A cada  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq r$  associa-se um  $b_j \in \{-1, 1\}$ . O mapa analisado é então definido por  $s(n+1) = f(s(n))$  com

$$f(s) = b_j \left[ \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right] \quad \text{para } \alpha_{j-1} \leq s < \alpha_j, \quad (1)$$

$n \in \mathbb{N}$  e  $s(0) \in [-1, 1[$ . Na Figura 1(a) exemplifica-se o mapa  $f(s)$  para  $r = 6$  e parâmetros  $\alpha_1 = -0,3$ ,  $\alpha_2 = -0,1$ ,  $\alpha_3 = 0,3$ ,  $\alpha_4 = 0,5$  e  $\alpha_5 = 0,8$ . Na Figura 1(b) são mostradas duas órbitas geradas por esse mapa com condições iniciais  $s(0) = 0,6$  (linha contínua) e  $s(0) = 0,600000001$  (linha tracejada) deixando-se explícita a dependência sensível com as condições iniciais, característica dos sinais caóticos.

A SAC é definida como  $R(k) = E[s(n)s(n+k)]$  sendo  $E[\cdot]$  o valor esperado sobre todas as condições iniciais que geram sinais caóticos [5]. Seguindo procedimento análogo

---

<sup>1</sup>rcosta@lcs.poli.usp.br, marcio@lcs.poli.usp.br

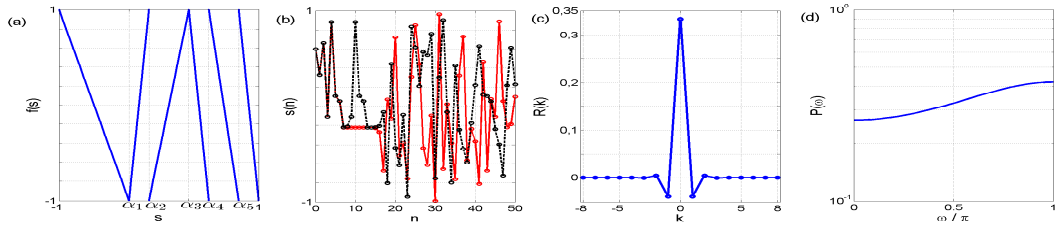


Figura 1: (a) Exemplo de mapa  $f(s)$  com  $r = 6$  inclinações; (b) órbitas para duas condições iniciais diferentes; (c) SAC e (d) DEP das órbitas desse mapa.

ao descrito em [2], com a introdução dos sinais  $b_j$ , pode-se obter uma fórmula fechada para  $s(n+k)$ . A partir daí, pode-se mostrar que

$$R(k) = \frac{1}{3}\psi^{|k|} \quad \text{com} \quad \psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r b_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2. \quad (2)$$

Calcula-se a DEP  $P(\omega)$  pela Transformada de Fourier de Tempo Discreto de  $R(k)$  [6], obtendo-se

$$P(\omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - \psi^2}{1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega)} \right). \quad (3)$$

Nas Figuras 1(c) e (d) são mostradas, respectivamente,  $R(k)$  e  $P(\omega)$  para o mapa da Figura 1(a). Note-se que o mapa descrito em [1] é um caso particular do apresentado aqui para  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 1$  e  $\alpha_1 \in (-1,1)$ . Já o mapa estudado em [3] pode ser obtido de (1) para  $b_1 = 1$  e  $b_2 = -1$  e  $\alpha_1 \in (-1,1)$  e o mapa de [4] para  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = -1$  e  $b_3 = 1$  com  $-\alpha_1 = \alpha_2$  para  $\alpha_{1,2} \in (0,1)$ . Por fim, o mapa apresentado em [2] é um caso particular de (1) para  $b_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, r$ .

## Agradecimentos

ME agradece ao suporte financeiro do CNPq, processos 479901/2013 – 9 e 309275/2016 – 4.

## Referências

- [1] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft. Análise espectral de sinais caóticos gerados pelo mapa de Bernoulli. In *Anais do CNMAC*, volume 5. SBMAC, 2014.
- [2] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, 133:187–191, apr 2017.
- [3] M. Eisenkraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Processing*, 90(1):385–390, jan 2010.
- [4] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, 94(0):149–157, jan 2014.
- [5] A. Lasota and M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [6] J. G. Proakis and D. K. Manolakis. *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Pearson, 2006.