

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Um Estudo Sobre Empacotamentos de Círculos

Juliana Rodrigues Silva de Oliveira<sup>1</sup>

Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP

Thadeu Alves Senne<sup>2</sup>

Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP

Luis Felipe Bueno<sup>3</sup>

Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP

## 1 Introdução

O problema de empacotamento é facilmente encontrado em situações diversas do cotidiano, como, por exemplo, o armazenamento de caixas em um caminhão ou o arranjo de produtos em uma caixa. Os itens serão empacotados em um objeto. Um objetivo possível do problema de empacotamento de itens em um determinado objeto consiste em encontrar um arranjo de um número fixo de itens que minimize, por exemplo, as dimensões do objeto.

Neste trabalho, estudamos o problema de empacotamento de círculos com raio unitário, que deverão ser arranjados em objetos dos seguintes tipos: circulares, quadrados, retangulares e triangulares equiláteros.

De acordo com a abordagem proposta em Birgin e Gentil [2], o objetivo é minimizar as dimensões do objeto que contém em seu interior  $N$  círculos idênticos de raio unitário, sem que haja sobreposição entre os itens e que respeite as características físicas do objeto, isto é, os itens não poderão ultrapassar a fronteira do objeto.

Desta maneira, o problema de empacotamento de círculos considerado neste trabalho é formulado como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \text{as dimensões do objeto} \\ \text{s. a} & \text{armazenar os itens sem sobreposições} \\ & \text{impedir que os itens não ultrapassem a fronteira do objeto.} \end{array} \quad (1)$$

## 2 Metodologia Empregada

Em um empacotamento ótimo, vários itens poderão estar em contato entre si, ou com a fronteira do objeto. Isso faz com que muitas restrições de desigualdade estejam ativas na solução do problema, isto é, que elas sejam satisfeitas na igualdade.

---

<sup>1</sup>julianarso@hotmail.com

<sup>2</sup>tsenne@gmail.com

<sup>3</sup>lfelipebueno@gmail.com

No trabalho de Birgin e Gentil [2], foi proposta uma estratégia de resolução do problema de empacotamento de círculos, baseada na combinação do algoritmo ALGENCAN [1] (que é um algoritmo baseado no método de Lagrangiano Aumentado para problemas de otimização restrita) com o método de Newton-Raphson para sistemas de equações não lineares.

Primeiramente, resolve-se os problemas do tipo 1 utilizando o ALGENCAN. Na solução encontrada, identifica-se quais restrições estão ativas naquela solução. Com o objetivo de refinar a solução encontrada pelo ALGENCAN, resolve-se o sistema não linear cujas equações correspondem a essas restrições ativas, através do método de Newton-Raphson.

Em Birgin e Gentil [2], são usados dois métodos para a resolução dos sistemas lineares provenientes do método de Newton-Raphson: quando a matriz Jacobiana do sistema não linear tem posto completo, é adotada a decomposição QR com pivoteamento de colunas (veja, por exemplo, [3]); caso contrário, é resolvido o sistema normal associado à solução de quadrados mínimos do sistema não linear original, utilizando a decomposição de Cholesky *modificada* (veja, por exemplo, [3]).

Outra alternativa possível consiste em encontrar diretamente a solução de quadrados mínimos do sistema não linear associado às restrições ativas. Dessa forma, com o intuito de reduzir as instabilidades numéricas que podem ser produzidas quando a matriz Jacobiana do sistema não linear não tem posto completo, investigaremos a possibilidade de adaptar a estratégia proposta por Birgin e Gentil [2], através da combinação do método ALGENCAN com o método de Levenberg-Marquardt [4], que é um método utilizado na resolução de problemas de quadrados mínimos não lineares. Pretendemos apresentar resultados preliminares obtidos com a adoção dessa estratégia.

## Agradecimentos

Ao apoio institucional da UNIFESP e ao apoio financeiro da CAPES.

## Referências

- [1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt. Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification. *Math. Program.*, 111:5–32, 2008. DOI: 10.1007/s10107-006-0077-1.
- [2] E. G. Birgin and J. M. P. Gentil. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips. *Comput. Oper. Res.*, 37:1318–1327, 2010. DOI: 10.1016/j.cor.2009.09.017.
- [3] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [4] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.