Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Controle Ótimo Minimax e a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Paola Geovanna Patzi Aquino[1]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP
Dr. Geraldo Nunes Silva[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP

1 Introdução

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) é uma equação diferencial parcial fundamental para a teoria de controle ótimo. A solução da equação HJB é a "função valor"(ou "função de custo ótimo"), a qual dá o custo mínimo para um sistema dinâmico dado, com uma função de custo associada. A equação é um resultado da teoria de programação dinâmica, em que Richard Bellman foi pioneiro na década de 1950.

Estudamos Problemas de Controle Ótimo Minimax; em que tanto a função de custo como a dinâmica dependem de um parâmetro desconhecido que pertence a um conjunto $\mathcal{A}$ e a otimização é tomada no pior caso. A prova baseia-se em fornecer primeiro os resultados para o caso em que o conjunto $\mathcal{A}$ é finito e então provar que o problema de controle geral cujo conjunto $\mathcal{A}$ é um espaço métrico compacto pode ser aproximado por problemas com conjuntos finitos $\mathcal{A}_i$. Em seguida, com uma análise de convergência os resultados são fornecidos para o problema geral. Neste trabalho, apresentaremos os resultados para o caso em que o conjunto de parâmetros $\mathcal{A}$ é finito.

2 Problema de Controle Ótimo Minimax

Fixemos um espaço métrico compacto $(\mathcal{A}, \rho_A(\cdot,\cdot))$. Tome funções $f : [S,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, um vector $x_0 \in \mathbb{R}^n$, um conjunto dependente de t, $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$, $S \leq t \leq T$.

O problema é o seguinte:

$$
(P) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} \quad \max_{\alpha\in\mathcal{A}} g(x(T;\alpha),\alpha) \\ \text{s.a. funções mensuráveis } u : [S,T] \to \mathbb{R}^m \text{ tal que } u(t) \in \Omega(t) \text{ q.t.p. } t \in [S,T] \\ \text{e arcos } \ \{x(.;\alpha) : [S,T] \to \mathbb{R}^n / \alpha \in \mathcal{A}\} \ \text{ tal que, para cada } \ \alpha \in \mathcal{A} \\ \dot{x}(t;\alpha) = f(t, x(t,\alpha), u(t), \alpha), \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [S,T] \\ x(S,\alpha) = x_0. \end{cases}
$$

[1]paola-anahi_@hotmail.com
[2]gsilva@ibilce.unesp.br

Um processo factível $(u, \{x(.;\alpha)/\alpha \in \mathcal{A}\})$ é dito um minimizador quando

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} g(x(T;\alpha),\alpha) \geq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} g(\bar{x}(T;\alpha),\alpha)$$

para todo processo factível $(u, \{x(.;\alpha)/\alpha \in \mathcal{A}\})$.

Proposição 2.1. *Seja $(u, \{x(.;\alpha)/\alpha \in \mathcal{A}\})$ um mínimo para o problema de controle ótimo minimax geral (P). Assuma que $\mathcal{A}$ é finito e*

H1) A função $f(\cdot, x, \cdot, \alpha)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável para cada $(x, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$. ($\mathcal{L}$ denota os subconjuntos de Lebesgue de $[0,1]$ e $\mathcal{B}^m$ denota a subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}^m$).

H2) Existem $C_f > 0$, uma função Borel mensurável $k_f : [S,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $t \to k_f(t, u(t))$ é integrável e, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, e para todo $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega(t)$, q.t.p. $t \in [S,T]$, tem-se

$$|f(t,x,u,\alpha) - f(t,x',u,\alpha)| \leq k_f(t,u)|x - x'| \quad e \quad |f(t,x,u,\alpha)| \leq C_f$$

H3) A função $g(\cdot, \alpha)$ é Lipschitz para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Então existe uma família de funções Lipschitz $\{\phi(\cdot,\cdot,\alpha) : [S,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}/\alpha \in \mathcal{A}\}$ para $\{\bar{x}(\cdot;\alpha)/\alpha \in \mathcal{A}\}$ e uma medida de probabilidade λ tal que supp$\lambda \subset \{\max_{\alpha' \in \mathcal{A}} g(x,\alpha') = g(z,\alpha)\}$ e $\varphi(t,z) = \max_{\alpha \in} \phi(t,z,\alpha)$ satisfaz,

$$\varphi(T,z) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} g(z,\alpha) \qquad \varphi(S,x_0) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} g(\bar{x}(T,\alpha),\alpha)$$

e para todo $(\xi,\eta) \in \partial^L \varphi(t,z)$ existem $(\xi_\alpha,\eta_\alpha) \in \partial^L \phi(t,z,\alpha)$ tais que $\xi = \int \xi_\alpha d\lambda(\alpha)$, $\eta = \int \eta_\alpha d\lambda(\alpha)$ e

$$\int_{\mathcal{A}} (\xi_\alpha + h(t,z,\eta_\alpha,u,\alpha)) d\lambda(\alpha) = 0.$$

3 Conclusões

A novidade deste trabalho com relação a [2] é o enfoque em programação dinâmica na obtenção das condições necessárias a otimalidade.

Agradecimentos

P.G.P. Aquino agradece a CAPES pelo auxilio financeiro e G.N. Silva agradece ao auxilio do CEPID-CeMEAI através do processo 2013/07375-0, Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São de Paulo (FAPESP).

Referências

[1] R. B. Vinter, *Optimal Control*. Birkhäuser Basel, Boston, 2000.

[2] R. B. Vinter, Minimax optimal control, *SIAM J. Control Optim.*, 44(3):939–968, 2005.