Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Revisão da solução de Harris 1962 que simula a estrutura de uma lâmina de corrente unidimensional (1-D)

A. Nilson Laurindo Sousa[1]
Departamento de Matemática, CESBA, Universidade Estadual do Maranhão - UEMA 65800-000 Balsas, MA, Brasil
A. Ojeda González[2]
Laboratório de Física e Astronomia, IP&D, Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP 12244-000 São José dos Campos, SP, Brasil

1 Introdução

A lei do equilíbrio de *Ampére* ou Equação de *Grad-Shafranov* (GS) em termos do potencial vetor normalizado Ψ, é dado como [1]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = e^{-2\Psi}. \tag{1}$$

As soluções exatas de uma lâmina de corrente, resume-se a obter as soluções $\Psi(X, Y)$ da Eq.(1). [3], obteve a solução em termos de variáveis complexas ($\zeta = X + iY$), tendo como resultado:

$$e^{-2\Psi} = \frac{4|g'(\zeta)|^2}{[1 + |g(\zeta)|^2]^2}, \tag{2}$$

que forma a base para a construção dos modelos de lâminas de corrente.

2 Solução de Harris

A partir de uma função geradora, $g(\zeta) = e^{i\zeta}$, [2] obteve uma solução que representa uma lâmina de corrente unidimensional (1-D). No trabalho de Harris, não se utilizou a equação (2) para obter a solução (1). Ele utilizou teoria cinética de plasmas para obter a solução. Neste trabalho, será apresentado o desenvolvimento matemático para obter a solução de Harris a partir da equação (2). Sejam as equações:

$$\zeta = X + iY, \;\; g' = \frac{dg(\zeta)}{d\zeta}, \;\; g(\zeta) = e^{i\zeta}. \tag{3}$$

[1]antlaus@hotmail.com
[2]ojeda.gonzalez.a@gmail.com

Portanto segue que:

$$\begin{aligned} |g'(\zeta)| &= |i \cdot e^{i\zeta}| = |i| \cdot |e^{i\zeta}| = 1 \cdot |e^{i(X+iY)}| = |e^{iX-Y}| \\ &= |e^{iX} \cdot e^{-Y}| = e^{-Y}, \text{ e de forma similar,} \\ |g(\zeta)| &= e^{-Y}. \end{aligned}$$

Substitui-se estes resultados na equação (2):

$$\begin{aligned} e^{-2\Psi} &= \frac{4(e^{-Y})^2}{[1+(e^{-Y})^2]^2} = \frac{4e^{-2Y}}{[e^{-Y}(e^{Y}+e^{-Y})]^2} = \frac{4e^{-2Y}}{e^{-2Y}(e^{Y}+e^{-Y})^2} \\ &= \frac{1}{\frac{(e^{Y}+e^{-Y})^2}{4}} = \frac{1}{\frac{(e^{Y}+e^{-Y})^2}{2^2}} = \frac{1}{\left(\frac{e^{Y}+e^{-Y}}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

e como, $cosh^2 Z = \frac{e^{Z}+e^{-Z}}{2}$ e $sech^2 Z = \frac{1}{cosh^2 Z}$, encontra-se a solução de *Harris*:

$$e^{-2\Psi} = sech^2 Y. \tag{4}$$

Este modelo é 1-D, sendo que $B_X = B_0 tanhY$, e $J_Z/[en_0 V_i(1+T_e/T_i)] = sech^2 Y$ [4].

3 Proposta de uma nova solução

Uma outra solução bidimensional é obtida a partir da escolha de $g(\zeta)$, como segue:

$$g(\zeta) = senh(\alpha\zeta),$$

que substituido na equação (2), obtém-se:

$$e^{-2\Psi} = \frac{4\alpha^2[cosh^2(\alpha X) - cos^2(\alpha Y)]}{[cosh^2(\alpha X) + cos^2(\alpha Y)]^2}. \tag{5}$$

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da Univap, a UEMA e a CAPES/PROSUP.

Referências

[1] A. O. González, M. O. Domingues, O. Mendes, et al, Grad-Shafranov Reconstruction: Overview and Improvement of the numerical Solution used in Space Physics, *Brazilian Journal of Physics*, volume 45, 493–509, 2015. DOI: 10.1007/s13538-015-0342-y.

[2] E. G. Harris, On a plasma sheath separatin regions of oppositely directed magnetic field, *Nuovo Cimento*, volume 23, 115–121, 1962. DOI: 10.1007/BF02733547.

[3] G. W. Walker, Some problems illustrating the forms of nebulae, *The Royal Society*, volume 91, 410–420, 1915. DOI: 10.1098/rspa.1915.0032.

[4] P. H. Yoon and A. T. Y. Lui, A class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria, *J. Geophys. Res.*, volume 110, A01202, 2005 DOI:10.1029/2003JA010308.