Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Matriz distância de grafos Threshold

Joice Santos do Nascimento[1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Maria Aguieiras A. de Freitas[2]
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Renata R. Del-Vecchio[3]
Universidade Federal Fluminense

1 Introdução

Em 1971, Graham e Pollack [5] estabeleceram a relação entre o número de autovalores negativos da matriz distância de um grafo e o problema de abordagem de sistemas de comunicação. A partir daí, vários pesquisadores passaram a estudar a matriz distância de grafos, bem como suas propriedades espectrais.

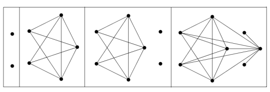
Em [6], Jacobs et al provaram um resultado acerca dos autovalores da matriz distância de grafos *threshold*. Nesse trabalho aprofundaremos nosso estudo sobre tais autovalores.

2 Grafos *threshold*

Um grafo *threshold* $G = (V, E)$ com n vértices é definido por uma sequência binária $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, onde $b_i = 0$, representa adição de um vértice isolado e $b_i = 1$, representa adição de um vértice dominante. O número de entradas unitárias da sequência binária, t, é chamado de traço do grafo [2]. Para realizar nosso estudo precisamos definir uma ferramenta nova que, para ser determinada, precisa apenas da sequência binária que define o grafo *threshold*:

Definição 1. *A variação binária de um grafo threshold G, ξ, é o número de índices i tais que $b_i = 0$ e $b_{i+1} = 1$ na sequência binária que define G.*

Exemplo 1. Se G é o grafo *threshold* abaixo, definido por $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$, então $n = 8$, $T = 4$ e $\xi = 2$.



[1]joicesantos@ime.uerj.br
[2]maguieiras@im.ufrj.br
[3]renata@vm.uff.br

A matriz distância $D = (d_{ij})$ de um grafo conexo G é a matriz quadrada de ordem n cujas as entradas d_{ij} são dadas pela distância entre os vértices v_i e v_j [1]. Com as definições já apresentadas obtivemos os seguintes resultados:

Teorema 1. *Seja G um grafo threshold com n vértices, traço t e variação binária ξ. Então $m_D(-2) = n - t - \xi$ e $t - \xi \leq m_D(-1) \leq t - \xi + 1$, onde $m_D(\alpha)$ é a multiplicidade de α como autovalor da matriz distância D de G.*

Em [6], Tura provou que se α é um autovalor da matriz distância de um grafo *threshold* tal que $\alpha \neq -2$ e -1, então α é simples. Obtivemos, então os seguintes corolário do Teorema 1:

Corolário 1. *Seja um grafo threshold G. Então -1 ou -2 sempre serão autovalores da matriz distância de G.*

Corolário 2. *Seja um grafo threshold G com variação binária ξ. Então o número de autovalores distintos da matriz distância de G é um dos valores: 2ξ, $2\xi + 1$ ou $2\xi + 2$.*

3 Conclusões

Com os resultados encontrados concluímos que o número de autovalores distintos de um grafo *split-completo*, diferente de uma estrela e de um grafo completo, é sempre quatro. Isso se dá pelo fato de todo grafo *split-completo* ser um grafo *threshold*, cuja sequência binária $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é tal que $b_i = 0$ se $1 \leq i \leq n - t$ e $b_i = 1$ se $n - t + 1 \leq i \leq n$. E ainda, foi possível aplicar os resultados a duas famílias de grafos *threshold* estudados em [3, 4].

Referências

[1] M. Aouchiche and P. Hansen, Distance spectra of graphs: A survey, Linear Algebra and its Applications, v 458, 301–386, (2014).

[2] A. E. Brouwer and W.H. Haemers, Spectra of Graphs, Springer Science & Business Media, (2011).

[3] R. R. Del-Vecchio, D. Justo, V. Trevisan and C. T. M. Vinagre, Maximum Laplacian energy among threshold graphs, Linear Algebra and its Applications, v 439, 1479–1495, (2013).

[4] R. R. Del-Vecchio, G. B. Pereira and C. T. M. Vinagre, Constructing pairs of Laplacian equienergetic threshold graphs, Matemática Contemporânea, v 44, 1–10, (2015).

[5] R. L. Graham and H. O. Pollack, On the adrressing problem for loop switching, Bell System Technical Journal, v. 50, n 80, pp. 2495-2519, (1971).

[6] D. P. Jacobs, V. Trevisan and F. C. Tura, Distance eigenvalue location in threshold graphs, Proceedings of DGA, pp.1-4, (2013).