

## Discussões Acerca do Teorema do Ângulo Externo na Geometria Esférica

Humberto Tomé<sup>1</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

Angela Leite Moreno<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

### 1 Introdução

Um importante Teorema da Geometria Euclidiana é O Teorema do Ângulo Externo, utilizado inclusive em algumas demonstrações desta. Este Teorema aparece na axiomática sugerida por Hilbert antes do Teorema das Paralelas [1]. Porém, na Geometria Euclidiana este não se mostra válido. Neste trabalho serão apresentados contra exemplos de alguns dos teoremas e colorários relacionados a este importante teorema.

### 2 Geometria Euclidiana $\times$ Geometria Esférica

**Definição 2.1.** *Seja  $ABC$  um triângulo, os ângulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{CAB}$  são chamados de **ângulos internos** ou **ângulos do triângulo**, como representado na Figura 1. Os suplementos destes ângulos são chamados de **ângulos externos do triângulo**.*

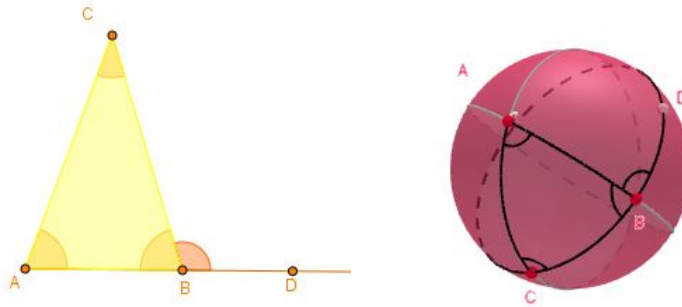


Figura 1: Ângulos do triângulo  $ABC$  nas geometrias Euclidiana e Esférica, respectivamente.

Observe que no triângulo  $ABC$  os ângulos internos são  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{CAB}$ ; enquanto o ângulo  $\widehat{CBD}$  representado é um dos ângulos externos do triângulo.

**Teorema 2.1** (Teorema do Ângulo Externo). *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais que qualquer ângulo interno não adjacente a este.*

<sup>1</sup>h1bts@yahoo.com.br

<sup>2</sup>aleitemoreno@gmail.com

O Teorema do Ângulo Externo, na Geometria Euclidiana, Teorema 2.1, diz que todo ângulo externo de um triângulo mede mais que qualquer ângulo interno não adjacente a este. Porém é possível construir um triângulo esférico com seus três ângulos retos, como na Figura 2, chamado triângulo trirretângulo.

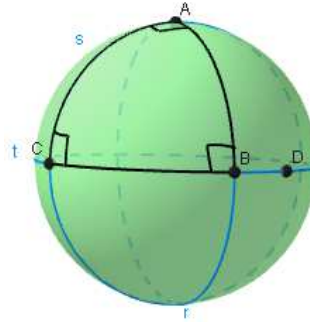


Figura 2: Triângulo esférico trirretângulo  $ABC$ .

Sendo  $\widehat{ABC}$  um ângulo reto, temos que seu suplementar, o ângulo  $\widehat{ABD}$ , é também um ângulo reto. Daí o ângulo externo  $\widehat{ABD}$ , mede o mesmo que qualquer dos ângulos internos. Logo, o Teorema do Ângulo Externo não é satisfeito na Geometria Esférica.

O triângulo trirretângulo também pode ser utilizado como contra-exemplo para outras duas proposições da Geometria Euclidiana.

**Proposição 2.1.** *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .*

Um triângulo de três ângulos retos não satisfaz esta proposição, pois somando quaisquer dois ângulos do Triângulo  $ABC$  temos a medida de  $180^\circ$ .

**Corolário 2.1.** *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

O triângulo  $ABC$  apresentado possui os três ângulos retos, portanto nenhum de seus ângulos são agudos.

O fato do Teorema do Ângulo Externo não ser válido na Geometria Esférica por mais que seja apresentado no trabalho de Hilbert antes do Teorema das Paralelas [1], sinaliza que as Geometrias Euclidianas e Esférica possuem mais divergências que apenas o Quinto Axioma de Euclides.

## Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG e à Unicamp.

## Referências

- [1] E. Q. F. REZENDE, M. L. B. QUEIROZ. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. 2.ed. Editora da UNICAMP, Campinas, 2008.