Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Método Multigrid na Resolução de Sistemas Lineares Provenientes do Método de Diferenças Finitas

Leticia Braga Berlandi[1]
Rafael de Lima Sterza[2]
Beatriz Liara Carreira[3]
Analice Costacurta Brandi[4]
Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

A discretização de modelos matemáticos que aparecem em dinâmica dos fluidos computacional gera grandes sistemas de equações algébricas do tipo $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada, b é o vetor independente e x é o vetor das incógnitas. A resolução de tais sistemas por métodos diretos não é recomendável, porque a inversão da matriz dos coeficientes é um processo muito caro. Por esta razão, o esquema CS (Correction Scheme) com o método multigrid é considerado no processo de resolução da equação de Poisson unidimensional.

A resolução dos sistemas lineares que aparecem em cada malha é calculada por métodos iterativos como os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. Além disso, uma comparação entre os erros numéricos cometidos com duas e quatro malhas é realizada.

2 Formulação Matemática e Numérica

O presente trabalho trata da resolução da equação de Poisson unidimensional dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \quad \text{com} \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

onde o sistema linear proveniente de sua discretização pelo método de diferenças finitas é resolvido pelo método multigrid. Este é um método iterativo onde um conjunto de malhas é utilizado. No multigrid CS são realizadas iterações na malha mais fina e em cada nível de malha mais grossa são resolvidas apenas equações residuais (Briggs et al., 2000).

[1]leticiaberlandi@gmail.com
[2]rlsterza@gmail.com
[3]bia.liara36@hotmail.com
[4]analice@fct.unesp.br

Para isto, são definidos os operadores de transferência de informações das malhas finas para as malhas mais grossas (restrição) e vice-versa (prolongação). Os sistemas lineares que aparecem em cada malha são resolvidos através de métodos iterativos, os quais têm propriedades para reduzir os erros oscilatórios rapidamente. A razão de engrossamento de uma malha fina para uma malha imediatamente mais grossa é definida como $r = \frac{h_{\Omega^h}}{h_{\Omega^{2h}}}$, onde Ω^h representa uma malha fina, Ω^{2h} é a malha imediatamente mais grossa e h é o tamanho de cada elemento da malha para malhas unidimensionais e uniformes.

3 Resultados Numéricos

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos considerando um problema do tipo (1), onde $u(x) = sen(x)$, $f(x) = -sen(x)$ e a condição inicial é dada por $f(0) = sen(0) = 0$. E, ainda, x está definido no intervalo $[0, 1]$.

A eficiência do método multigrid, implementado no software MatLab, foi verificada. Para tal verificação, uma análise do erro numérico cometido na solução do problema com $h = 0.1$ e erro máximo menor ou igual a 10^{-4}, foi relizada. A distribuição do erro máximo absoluto pode ser observada na Tabela 1.

Tabela 1: Erro máximo absoluto cometido em diferentes espaçamentos.

Espaçamento	0.1	0.05	0.01
2 malhas	$4,9636.10^{-5}$	$1,2457.10^{-5}$	$7.1788.10^{-6}$
4 malhas	$4,7353.10^{-5}$	$1,0276.10^{-5}$	$4.3519.10^{-7}$

Analisando a Tabela 1, pode-se concluir que com a utilização de quatro malhas a solução numérica se aproxima mais da solução exata do problema.

4 Conclusão

Este trabalho faz uma análise sobre a solução da equação de Poisson unidimensional, obtida através do esquema CS com o método multigrid. A comparação dos erros cometidos com duas e quatro malhas foi realizada e através dela pôde-se verificar a eficiência do método numérico para ambos os casos. Porém, sob o ponto de vista de uma melhor aproximação, a solução obtida utilizando-se quatro malhas apresenta um desempenho superior quanto à utilização de duas malhas, pois o erro cometido ao se utilizar duas malhas foi maior do que o erro com quatro malhas.

Referências

[1] W. L. Briggs, V. E. Henson, and S. F. McCormick. *A Multigrid Tutorial.* SIAM, 2000.

[2] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1992.

