

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Aplicação de Métodos Numéricos na Deformação de Placas Engastadas

Mariana P. Bernardi<sup>1</sup>, Ricardo A. Andreotti<sup>2</sup>, Jorge L. N. Goes<sup>3</sup>, Eduarda A. Rodrigues<sup>4</sup>  
 Coordenação de Engenharia Civil, COECI, UTFPR, Campo Mourão, PR  
 Adilandri Mércio Lobeiro<sup>5</sup>  
 Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Campo Mourão, PR

## 1 Introdução

Neste trabalho, revolve-se numericamente a equação diferencial parcial (EDP) da placa engastada,

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + 2H \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) = \rho(x, y), \quad (1)$$

definida na região  $\Omega = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$ , em que  $D_x = \epsilon_x t^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ ,  $D_y = \epsilon_y t^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ ,  $D_{xy} = G_{xy} t^3 / 6$  e  $H = (D_x \nu_{yx} + D_y \nu_{xy} + 4D_{xy}) / 2$ ,  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  são módulos de elasticidade,  $\nu_{xy}$  e  $\nu_{yx}$  são os coeficientes de poisson,  $G_{xy}$  módulo de cisalhamento,  $\rho$  é a carga e  $t$  a espessura da placa, sujeita as seguintes condições de contorno

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(b, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, c) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, d) = 0. \quad (2)$$

Para obter a solução numérica da EDP (1), utiliza-se o Método de Diferenças Finitas (MDF). A equação (1) é discretizada na região  $\Omega$ , onde o eixo das abcissas e ordenadas são divididos, respectivamente, em “M” e “N” partes iguais de comprimento  $h = (b - a) / M$  e  $k = (d - c) / N$ , sendo  $x_i = a + (i - 1)h$  e  $y_j = c + (j - 1)k$  em que  $i = 1 \dots M, M + 1$  e  $j = 1 \dots N, N + 1$ .

Substitui-se as fórmulas de diferenças

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+2}, y_j) - 4u(x_{i+1}, y_j) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-2}, y_j)}{h^4}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+2}) - 4u(x_i, y_{j+1}) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j-2})}{k^4} \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>marianabernardi@alunos.utfpr.edu.br

<sup>2</sup>andreotti@alunos.utfpr.edu.br

<sup>3</sup>jgoes@utfpr.edu.br

<sup>4</sup>dudaakemi@gmail.com

<sup>5</sup>alobeiro@utfpr.edu.br

2

e

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 2u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_{j+1}) + 4u(x_i, y_j) - 2u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) - 2u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_{j-1})}{h^2 k^2}, \quad (5)$$

com  $i = 2 \dots M$  e  $j = 2 \dots N$  na EDP (1) transformando-a num sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} w_{i,j} = & (-Aw_{i+2,j} - Bw_{i+1,j} - Bw_{i-1,j} - Aw_{i-2,j} \\ & - Dw_{i+1,j+1} - Dw_{i+1,j-1} - Ew_{i,j+1} - Ew_{i,j-1}, \\ & - Dw_{i-1,j+1} - Dw_{i-1,j-1} - Fw_{i,j+2} - Fw_{i,j-2} + G)/C, \end{aligned} \quad (6)$$

em que  $w_{i,j}$  é uma aproximação para  $u(x_i, y_j)$ ,  $A = k^4 D_x$ ,  $B = -4(D_x k^4 + Hh^2 k^2)$ ,  $C = 6D_x k^4 + 8Hh^2 k^2 + 6D_y h^4$ ,  $D = 2Hh^2 k^2$ ,  $E = -4(Hh^2 k^2 + D_y h^4)$ ,  $F = D_y h^4$  e  $G = \rho h^4 k^4$ .

## 2 Conclusões

Obteve-se a solução do sistema (6) por meio do método de Gauss-Seidel com uso do *software* MatLab, na qual, foi encontrada a solução numérica, de um estudo de caso, da EDP (1) sujeito as condições de contorno (2). Para isso, considerou-se os valores:  $a = 0$  mm,  $b = 4000$  mm,  $c = 0$  mm,  $d = 4000$  mm,  $t = 150$  mm,  $m = 20$ ,  $n = 20$ ,  $\epsilon_x = 25$  GPa,  $\epsilon_y = 25$  GPa,  $G_{xy} = 10$  GPa,  $\nu_{xy} = 0,2$ ,  $\nu_{yx} = 0,2$  e  $\rho = 0,003$  MPa. O resultado, foi comparado com o *Robot Structural Analysis software*, e obteve-se um resultado satisfatório.

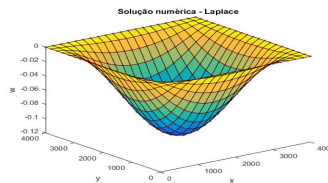


Figura 1: Deformação da Placa Engastada.

## Referências

- [1] R. L. Burden and J. D. Faires, *Análise Numérica, Pioneira Thomson Learning.*, São Paulo, 2003.
- [2] J. L. N. Goes, *Análise de Pontes de Madeira Protendidas Transversalmente com Seção Caixaõ. Tese de Doutorado, USP, 2005.*