Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Forma Canônica de Jordan

Marcos Antonio Viana Costa[1]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP
Marcos Tadeu De Oliveira Pimenta[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP

1 Resumo

Neste trabalho abordaremos um dos conceitos mais úteis e de grande importância da Álgebra Linear, conhecida como Forma Canônica de Jordan. Nosso objetivo é construir a forma canônica de Jordan de um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita.

Para introduzir a construção da Forma de Jordan é necessário os seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, com V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geqslant 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Então $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde, para cada $i = 1, \ldots, r$, temos:*

(i) $dim_{\mathbb{K}}(U_i) = m_i$;

(ii) *o subespaço U_i é T-invariante;*

(iii) *a restrição do operador linear $(\lambda_i Id - T)$ a U_i é nilpotente.*

Utilizaremos o teorema anterior para construir a forma de Jordan de um operador linear. Considere $T : V \to V$ um operador linear tal que $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geqslant 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Sabemos que existe uma decomposição $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ que satisfaça as propriedades (i),(ii) e (iii) do teorema anterior. Para cada $i = 1, \ldots, r$ iremos considerar o operador $T_i = T|_{U_i} : U_i \to U_i$. Sendo $\hat{T}_i = T_i - \lambda_i Id_{m_i}$ nilpotente, logo existe uma base $\mathcal{B}_i$ de U_i e números $t_i, m_{i1} \geqslant m_{i2} \geqslant \cdots \geqslant m_{it_i}$, tais que:

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_{i2}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_{it_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

[1]marcosviana1997@gmail.com
[2]pimenta@fct.unesp.br

onde, para cada $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, t_i$, tem-se:

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \tag{2}$$

onde $J_{m_{ij}}(\lambda_i) \in \mathbb{M}_{ij}(\mathbb{K})$ é o correspondente bloco de Jordan. Como a soma $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ é direta, segue que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é base de V. Portanto:

$$[T_{\mathcal{B}}] = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

A matriz acima é denominada *forma de Jordan* associada a T.

Cabe salientar as aplicações da forma de Jordan, dentre elas destaca-se a generalização do teorema de existência e unicidade para sistemas de equações diferenciais lineares e a sua utilização para obter raízes m-ésimas de operadores lineares.

Referências

[1] F. U. Coelho, M. L. Lourenço. *Um Curso de Álgebra Linear*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

[2] E. L. Lima *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 1996.