Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Uma Introdução à Teoria de Loops

Gabriel de Oliveira[1]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ
Rosemary Miguel Pires[2]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ

1 Introdução

Seja L um conjunto não vazio munido de uma operação binária "."(denotado por $(L, .)$) e seja a qualquer elemento fixado em L. Considere as aplicações de translação $L_a : L \longrightarrow L$ e $R_a : L \longrightarrow L$, definidas respectivamente por $L_a(x) = a.x$ e $R_a(x) = x.a$, $\forall x \in L$. Chamamos o par $(L, .)$ de quasigrupo se as aplicações $L_a : L \longrightarrow L$ e $R_a : L \longrightarrow L$ são bijeções para todo $a \in L$. Um loop é um quasigrupo que possui um elemento identidade (bilateral) 1. Em particular, definimos grupo multiplicativo de um loop, subloop, loop de propriedade inversa, comutador, associador e centro de loops e, mostramos que, em geral, o Teorema de Lagrange não vale para loops. Neste trabalho, apresentamos alguns resultados e conceitos algébricos fundamentais da Teoria de Loops, como por exemplo a proposição a seguir, que caracteriza um subloop:

Proposição 1.1. *Seja L um loop e H um subconjunto não vazio de L. Então as seguintes afirmações são equivalentes: 1. H é um subloop de L. 2. Se $x, y \in H$, então xy , $xR(y)^{-1}$ e $xL(y)^{-1}$ estão todos em H. 3. Se $x, y, z \in L$, $xy = z$ e dois de x, y, z estão em H, então o terceiro desses elementos estão em H também.*

2 A Teoria de Loops e a Teoria de Grupos

Especificamente, também, temos como objetivo construir uma relação entre a Teoria de Loops e a Teoria de Grupos, que conseguimos realizar através de inúmeros resultados. Essa construção é exemplificada, por exemplo, pela seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Cada núcleo de um loop é um subloop associativo e portanto, um grupo. O centro de um loop é um grupo abeliano.*

---

[1]oliveiragabriel@id.uff.br
[2]rosemarypires@id.uff.br

3 Tipos especiais de loops

A seguir, apresentamos alguns tipos especiais de loops tais como loops de Moufang (se satisfaz qualquer uma das três "identidades de Moufang": à esquerda, $((xy)x)z = x(y(xz))$, à direita, $((xy)z)y = x(y(zy))$, e central, $(xy)(zx) = (x(yz))x$, para quaisquer x, y, z do loop), loops Hamiltonianos (em que todos seus subloops são normais) e o loop de Cayley (formado pelos elementos da base dos números de Cayley e seus respectivos negativos), que trazem-nos resultados distintos e de extrema importância para a Teoria de Loops. Para exemplificar, são exibidos alguns importantes exemplos de loops de Moufang que não são grupos, como o da observação a seguir:

Observação 3.1. *Seja G um grupo não abeliano e seja u uma indeterminada. Seja $L = G \cup Gu$ a união disjunta de G e Gu a extensão da operação binária em G para a operação binária em L pelas seguintes regras: $g(hu) = (hg)u, (gu)h = (gh^{-1})u, (gu)(hu) = h^{-1}g$, para $g, h \in G$. Então L é um loop de Moufang, denotado por M(G,2), que não é um grupo.*

4 O Teorema de Norton

Por fim, mostramos alguns resultados que nos auxiliam na demonstração de um teorema fundamental que exibimos, o Teorema de Norton, que nos ajuda a caracterizar um loop hamiltoniano. O próprio teorema encontra-se abaixo:

Teorema 4.1. *(Norton) Seja L um loop de Moufang. Então L é hamiltoniano se, e somente, se :*
1. L é um grupo abeliano, ou 2. $L \cong Q_8 \times E \times A$, onde Q_8 é o grupo dos quatérnios de ordem 8, E é um (possivelmente trivial) 2-grupo abeliano elementar e A é um (possivelmente trivial) grupo abeliano em que todos elementos são de ordem ímpar e finita, ou 3. $L \cong M_{16}(Q_8) \times E \times A$, onde $M_{16}(Q_8)$ é loop de Cayley e E e A são como em 2.

5 Conclusões

Com a construção desse trabalho, vimos que essa área de pesquisa é bem extensa, e que, assim, apesar de ser um trabalho, inicialmente, essencialmente téorico, temos como objetivo expandi-lo em um projeto intitulado "Loops com Aplicações em GAP", implementando computacionalmente boa parte dessa teoria.

Referências

[1] E.G. Goodaire, E. Jaspers, and C. Polcino. *Alternative Loop Rings.* North Holland Math, Studies N.184, Elsevier, Amsterdam (1996).

[2] H.O. Pflugfelder. *Quasigroups and Loops: An Introduction.* Berkin: Heldermann (1990).