Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Construção dos Reticulados A_2 e D_3 via Polinômios

Victor Passarelli Destefane[1]
Matemática, UNESP, Rio Claro, SP
William Lima da Silva Pinto[2]
Matemática, UNESP, Rio Claro, SP
Carina Alves[3]
Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

1 Introdução

O problema de encontrar empacotamentos esféricos densos em um dado espaço é equivalente a encontrar códigos corretores de erros eficientes. A partir desta percepção, passaram a associar o estudo dos códigos aos reticulados e surgiram várias famílias de reticulados.

Um dos principais ingredientes para a geração de reticulados no $\mathbb{R}^n$ é o mergulho canônico, que quando aplicado ao anel dos inteiros de um corpo de números ou a um ideal no anel dos inteiros, produz um reticulado no $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho, apresentamos um outro método que é abordado em [2], para a geração de reticulados no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Mais especificamente, através de polinômios de grau 2 e 3, obtivemos os reticulados A_2 e D_3 que são os reticulados com densidade de empacotamento ótimas em dimensão 2 e 3, respectivamente.

2 Reticulados

Seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$ (tal que $m \leq n$). O conjunto de pontos

$$\Lambda = \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i, \ \lambda_i \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

é chamado um reticulado de posto m, e o conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é chamado uma base do reticulado. A matriz geradora de Λ é definida como sendo a matriz

[1]victorpassarelli5@gmail.com
[2]william26535@hotmail.com
[3]carina@rc.unesp.br

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

onde $v_i = (v_{i1}, \cdots, v_{ni})$, para $i = 1, \cdots, n$ e o raio de empacotamento de Λ é definido por $\rho = \dfrac{1}{2}\min\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}$.

A fórmula da densidade de centro de um reticulado Λ, que pode ser encontrada em [1], é dada por

$$\delta(\Lambda) = \frac{\rho^n}{|\det(M)|}. \tag{3}$$

Como estamos interessados em construir reticulados via polinômios, considere os polinômios $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Nosso primeiro passo é, a partir da equação (3) e dos polinômios $f(x)$ e $g(x)$, obter outra expressão para o cálculo da densidade de centro.

Se α e β são raízes reais de $f(x)$, construímos um reticulado Λ_f com matriz geradora $M_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Se α e β são raízes complexas de $f(x)$, construímos um reticulado $\Lambda_{\tilde{f}}$ com matriz geradora $M_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}$.

Assim, fazendo o uso das matrizes geradoras dadas acima obtemos novas expressões para o cálculo da densidade de centro do reticulado Λ_f e procuramos por valores de a e b que minimizem o raio de empacotamento e nos forneçam a densidade de centro do reticulado hexagonal A_2. De modo análogo, consideramos $g(x)$ para obter reticulados equivalentes ao reticulado D_3.

3 Conclusões

Neste trabalho apresentamos um outro método para a geração de reticulados no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Acreditamos que, da mesma forma como foi feito para dimensões 2 e 3, pode-se obter reticulados com densidade de centro ótima para dimensões maiores. O grande desafio desse método é determinar a matriz geradora do reticulado através das raízes do polinômio em questão e também minimizar uma forma quadrática, que representa o quadrado da norma de um vetor nesse reticulado.

Referências

[1] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer-Verlag, New York, (1999).

[2] T. M. Souza, Reticulados algébricos em corpos de números abelianos, Dissertação de Mestrado em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, (2004).