Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Novo Método Primal-Dual para o Problema Compressive Sensing

Paula Aparecida Kikuchi[1]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp, Campinas, SP
Aurelio Ribeiro Leite Oliveira[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp, Campinas, SP
Daniela Renata Cantane[3]
Departamento de Bioestatística, Instituto de Biociências, Unesp, Botucatu, SP

1 Introdução

Uma técnica eficiente em adquirir e reconstruir sinais é chamada *Compressive Sensing*, esta é aplicada nas áreas de fotografia, tomografia, entre outras. Nesse trabalho buscamos melhores resultados na recuperação de sinais esparsos, por meio do Método Primal-Dual, considerando as condições de otimalidade em relação a variável dual. A teoria acerca de Compressive Sensing (CS), afirma que pode-se recuperar certos sinais e imagens através de poucas amostras. CS torna isso possível pois visa: esparsidade do sinal de interesse, e a matriz a ser trabalhada obedecer a condição da propriedade da isometria restrita (RIP) [1]. CS busca a solução do sistema sobredeterminado $Ax = \hat{b}$, com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{b} \in \mathbb{R}^m$. Mostra-se que em certas situações a recuperação exata da solução esparsa $\hat{x}$ pode ser encontrada com alta probabilidade por meio do problema *Basis Pursuit* [2]:

$$\text{minimizar} \quad \|x\|_1 \quad \text{sujeito a} \quad Ax = \hat{b} \ , \tag{1}$$

Vamos assumir que $\hat{x}$, solução de interesse, possui uma imagem esparsa através de redundantes e coerentes dicionários $W \in E^{n\times l}$, onde $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $n \leq l$. Dessa forma $W^*\hat{x}$ é esparso, onde $*$ denota o operador transposto conjugado. Se $W^*\hat{x}$ é esparso sob certas condições da matriz A e W, a solução ótima do problema:

$$\text{minimizar} \quad \|W^*x\|_1 \quad \text{sujeito a} \quad Ax = \hat{b}, \quad \text{é} \quad \hat{x}. \tag{2}$$

Se as medidas $\hat{b}$ estão contaminadas por ruído, consideramos $b = \hat{b} + e$, onde e é um vetor de ruído. Em aplicações reais $W^*\hat{x}$ pode não ser exatamente esparso, mas suas informações podem ser concentradas em apenas poucos componentes.

[1]paulapkikuchi@gmail.com
[2]aurelio@ime.unicamp.br
[3]dcantane@ibb.unesp.br

2 Um Novo Método Primal-Dual para CS

A não diferenciabilidade da norma-l_1 é tratada por meio da função Pseudo-Huber:

$$minf_{\tau}^{\mu}(x) := \tau\psi_{\mu}(x) + \frac{1}{2}\left\|Ax-b\right\|_2^2, \text{onde} \quad \psi_{\mu}(x) = \sum_{i=1}^{l}((\mu^2+|W_i^* x|^2)^{\frac{1}{2}}-\mu). \tag{3}$$

Reformulando o problema (3), obtemos:

$$min \sup_{g\in\mathbb{C}^l, \|g\|_\infty \leq 1} \tau Re(\overline{g}^* W^*)x + \tau\sum_{i=1}^{l}(\mu(1-|g_i|^2)^{\frac{1}{2}}-\mu) + \frac{1}{2}\left\|Ax-b\right\|_2^2. \tag{4}$$

As condições de otimalidade de (4) são:

$$\tau Re(W\overline{g}) + A^T(Ax-b) = 0, \quad D^{-1}\overline{g} = W^* x, \quad Re(W^*)x = \sum_{i=1}^{l}\frac{\mu Re(e_i g_i)}{(1-\|g_i\|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

sendo $D := diag(D_1, D_2, ..., D_l)$, com $D_i := (\mu^2+|y_i|^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\forall i = 1,2,3,...l$, e $y = [y_1, y_2, ..., y_l]^T := W^* x$; estando $g \in E^l$.

Nosso objetivo é aplicar o método de pontos interiores, ou seja, empregar uma variação do Método de Newton as condições de otimalidade [3]. Vamos considerar o gradiente em relação as variáveis primal e dual; o que difere das literaturas acerca o problema [4], em que é considerado apenas o gradiente em relação a variável primal.

3 Conclusões

Considerando que a abordagem proposta utiliza mais informações acerca do problema, as direções obtidas possuem melhores propriedades que as direções da abordagem anterior.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CNPq e FAPESP.

Referências

[1] E. J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12):4203–4215, Dec 2005. DOI: 10.1109/TIT.2005.858979.

[2] P. A. Kikuchi. Métodos de pontos interiores aplicados à basis pursuit. Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2013.

[3] S. J. Wright. *Primal-dual interior-point methods*. Siam, 1997.

[4] K. Fountoulakis. *Higher-Order Methods for Large-Scale Optimization.* Tese de Doutorado, University of Edinburgh, 2015.

