

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais: aspectos teóricos

Lucas dos Santos Fernandez<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ

Alexandre Molter<sup>2</sup>

Instituto de Física e Matemática, UFPel, Pelotas, RS

Fabio Silva Botelho<sup>3</sup>

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis, SC

**Resumo.** Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia para o projeto simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais em estruturas. A localização de atuadores é considerada em função dos deslocamentos pontuais e a otimização topológica é feita pela minimização da flexibilidade. A análise de sensibilidade é desenvolvida de forma detalhada, a fim de mostrar os aspectos teóricos envolvidos no problema de otimização. A otimização topológica foi realizada via Programação Linear Sequencial (PLS) e a discretização do problema foi feita via Método dos Elementos Finitos (MEF). É apresentado um exemplo numérico para mostrar a eficácia da metodologia proposta.

**Palavras-chave.** Otimização topológica, atuadores proporcionais, estruturas.

## 1 Introdução

No projeto de sistemas mecânicos controlados é comum que o projeto estrutural preceda o projeto de controle, ou seja, engenheiros estruturais definem um *layout* com a finalidade de suportar carregamentos estáticos e dinâmicos e os engenheiros de controle definem um sistema controlador utilizando a estrutura pré-definida. Projetos em sequência podem diminuir de forma significativa a eficácia do controle das vibrações da estrutura, desvantagem esta já observada e apontada há duas décadas em [4, 5], indicando a necessidade do desenvolvimento de projetos simultâneos para o *layout* e o controle estruturais. Dentre alguns trabalhos recentes com este viés tem-se [2, 3, 7], onde projetos simultâneos de otimização topológica e controle são desenvolvidos.

Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia para o projeto simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais em estruturas. A partir de um funcional de energia a ser minimizado, observando restrições de uso de material impostas, busca-se a distribuição ótima de material estrutural e a localização ótima para atuadores proporcionais na estrutura otimizada.

---

<sup>1</sup>lucasf@lncc.br

<sup>2</sup>alexandre.molter@ufpel.edu.br

<sup>3</sup>fabio.silva.botelho@gmail.com

Na metodologia proposta, a topologia ótima para a estrutura é determinada utilizando o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Neste método de otimização topológica, as variáveis de projeto são relaxadas e limitadas pelo intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , permitindo a representação da topologia ótima numa escala de cinzas [1]. Considerando um segundo material a ser distribuído simultaneamente ao material estrutural, foi possível identificar a melhor posição para um atuador proporcional que, neste trabalho, pode ser considerado como uma mola cujo propósito é o de anular a ação de uma força estática aplicada à estrutura. Foi realizado um pós-processamento dos resultados a fim de eliminar as regiões cinzas da topologia ótima e identificar a localização para os atuadores com a cor vermelha. A localização e o dimensionamento de atuadores em estruturas são fatores relevantes quando se deseja obter um melhor desempenho estrutural. Neste trabalho, o foco está na localização ótima destes atuadores.

A metodologia é apresentada neste trabalho de forma resumida. O problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais está declarado na Seção 2. A Seção 3 traz de forma detalhada a análise de sensibilidade necessária para a implementação computacional do problema. Na Seção 4 é apresentado um exemplo numérico e a Seção 5 consiste nas conclusões e considerações finais.

## 2 O problema de otimização

Considere o clássico problema de minimização da flexibilidade em elasticidade linear. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ), um domínio aberto e conexo com uma fronteira lipschitziana  $\Gamma$ . A fronteira  $\Gamma$  é dividida em duas partes,  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ , referentes às fronteiras onde serão aplicadas as cargas e especificados os deslocamentos, respectivamente. O problema pode então ser formulado pela minimização do funcional  $l(u)$  sobre o conjunto  $\Psi$  da forma como apresentado abaixo:

$$\begin{cases} \min_{(u, \rho_1, \rho_2) \in \Psi} & l(u), \\ \text{s. a} & a(u, v, \rho_1, \rho_2) - l(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\Psi$  é o conjunto dos deslocamentos e valores das variáveis de projeto  $\rho_1$  e  $\rho_2$  admissíveis, dado por  $\Psi = \mathcal{U} \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ , de modo que  $\mathcal{U} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) : u = 0 \text{ sobre } \Gamma_u\}$ ,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \rho_1(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{1_{min}} \leq \rho_1(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_1(x) d\Omega = \eta_1 V \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \rho_2(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{2_{min}} \leq \rho_2(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_2(x) d\Omega = \eta_2 V \right\},$$

onde  $\mathcal{U}$  é o espaço dos campos de deslocamentos cineticamente admissíveis,  $V$  é o volume total do domínio  $\Omega$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são frações do volume que, ao serem consideradas no problema, impõem restrições quanto ao uso do material de densidade  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , respectivamente.

A função custo do problema é minimizada em relação às variáveis de projeto estrutural  $\rho_1$  e de controle  $\rho_2$ , onde o funcional

$$l(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma \quad (2)$$

é o trabalho das forças externas com  $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  sendo o vetor de deslocamentos mecânicos,  $t \in L^2(\Gamma_t; \mathbb{R}^d)$  representa o vetor das forças de superfície e  $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$  o vetor das forças de corpo. Note também que  $\rho_{1_{min}}$  e  $\rho_{2_{min}}$  dizem respeito às densidades mínimas relativas às variáveis de projeto estrutural e de controle, respectivamente. Além disso,

$$a(u, v, \rho_1, \rho_2) = \int_{\Omega} S(u) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} ru \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega, \quad (3)$$

é dado pela soma do trabalho virtual interno de um corpo elástico em equilíbrio e da energia de controle do sistema que, ao conter a constante de proporcionalidade  $r$ , assume o papel de uma energia de um atuador proporcional. Os símbolos  $\cdot$  e  $:$  denotam as contrações por um e dois índices, respectivamente. Por exemplo,  $a \cdot b = a_i b_i$  e  $A : B = A_{ij} B_{ij}$ .

Em (3), note que  $S$  é o tensor de deformação dado por  $S(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$ . Ademais, o termo  $c(\rho_1)$  é tal que  $c(\rho_1) = \rho_1(x)^p c^0$ , onde  $c^0$  é o tensor de rigidez elástica do material base. No SIMP, conforme [1], o tensor de elasticidade  $c$  do material em cada ponto do domínio varia com a pseudodensidade  $\rho_1$ , enquanto que o coeficiente de Poisson  $\nu^0$ , relativo ao material, não depende de  $\rho_1$ . Tem-se, ainda, que  $h(\rho_1, \rho_2) = \rho_1(x)^p \rho_2(x)^p h^0$  é uma função de localização, sendo  $h^0$  uma matriz de localização que indica o local onde se irá aumentar (ou diminuir) a rigidez dos elementos nas direções  $x_1$  ou  $x_2$ , podendo ser utilizada quando se quer impor uma determinada condição permanente a um elemento da malha. Note que  $c(\rho_1)$  e  $h(\rho_1, \rho_2)$  definem o modelo material do problema (1).

A restrição de igualdade do problema (1) provém do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Assim sendo, o problema simultâneo contínuo de distribuição ótima de material e localização de atuadores proporcionais está bem definido. A resolução deste problema implica, claramente, em obter duas respostas: a topologia ótima condizente com as restrições de suporte e de carregamento, implícitas ao problema, e restrições de material especificadas pelos conjuntos  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ ; e a melhor localização para atuadores nesta topologia.

### 3 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade consiste em calcular as derivadas da função objetivo e das restrições com respeito às variáveis de projeto e resolver o problema estacionário. Para este fim, considera-se o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (1) de onde serão obtidas as expressões das derivadas em relação às variáveis de projeto (fundamentais para a atualização das densidades e, conseqüentemente, para a minimização do funcional  $l(u)$ ), bem como as equações de equilíbrio do problema por meio das variações em  $u$  e  $v$ , sendo estas variáveis de estado. O Lagrangeano  $\mathcal{L}$  é dado por

$$\mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda) = l(u) - a(u, v, \rho_1, \rho_2) + l(v) + w_1(\rho_1, \Lambda, \lambda) + w_2(\rho_2, \Lambda, \lambda), \quad (4)$$

sendo

$$w_1(\rho_1, \Lambda, \lambda) = \Lambda_1 \left( \int_{\Omega} \rho_1 d\Omega - \eta_1 V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho_1 - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{1_{min}} - \rho_1) d\Omega; \quad (5)$$

$$w_2(\rho_2, \Lambda, \lambda) = \Lambda_2 \left( \int_{\Omega} \rho_2 d\Omega - \eta_2 V \right) + \int_{\Omega} \lambda_3 (\rho_2 - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_4 (\rho_{2_{min}} - \rho_2) d\Omega. \quad (6)$$

Em (4),  $v$  atua como um multiplicador de Lagrange para as restrições de equilíbrio, obtidas nesta Seção. Além disso,  $\rho$  representa as variáveis de projeto  $\rho_1 \in \mathcal{B}_1$  e  $\rho_2 \in \mathcal{B}_2$ , ambas funções escalares de  $x$ ;  $\Lambda$  e  $\lambda$  representam multiplicadores de Lagrange de modo que  $\Lambda$  representa  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda$  representa as funções escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in L^2(\Omega)$ .

A fim de obter as equações de Euler-Lagrange do problema de otimização, considera-se nos cálculos abaixo uma variável real auxiliar, denotada por  $\xi$ , e  $\alpha_\Psi = \{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  o conjunto de direções admissíveis em  $\Psi$ .

Varição em  $u$ : A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $u$  na direção de  $\alpha_1$  é denotada por  $\delta_u \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1)$ . Fazendo  $\delta_u \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1) = 0$ , segue que  $\delta_u l(u; \alpha_1) - \delta_u a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_1) = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} \delta_u l(u; \alpha_1) &= \int_{\Omega} f \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \delta u d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \alpha_1 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \alpha_1 d\Gamma, \end{aligned} \tag{7}$$

e também que

$$\begin{aligned} \delta_u a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_1) &= \int_{\Omega} S(\delta u) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \delta u \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \right) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(\alpha_1) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \alpha_1 \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Considere a identidade, oriunda do Teorema da Divergência,

$$\int_{\Omega} [z \nabla \cdot y + \nabla z \cdot y] d\Omega = \int_{\Gamma} z y \cdot n d\Gamma, \tag{9}$$

onde  $z$  é um campo escalar,  $y$  é um campo vetorial e  $n$  é um vetor normal à superfície  $\Gamma$ . Utilizando a versão desta identidade para tensores de segunda ordem na primeira integral da última igualdade de (8), obtém-se que

$$\int_{\Omega} S(\alpha_1) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [c(\rho_1) : S(v)] \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [c(\rho_1) : S(v)] d\Omega \tag{10}$$

Escrevendo  $\sigma(v, \rho_1) = c(\rho_1) : S(v)$  em (10) e considerando os resultados de (7), (8) e (10) na equação  $\delta_u l(u; \alpha_1) - \delta_u a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_1) = 0$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} \alpha_1 \cdot [\nabla \cdot \sigma(v, \rho_1) - r h(\rho_1, \rho_2) \cdot v + f] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [\sigma(v, \rho_1) \cdot n - t] d\Gamma = 0, \tag{11}$$

para todo  $\alpha_1$  admissível. Assim, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, tem-se que

$$\nabla \cdot \sigma(v, \rho_1) - rh(\rho_1, \rho_2) \cdot v + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \quad (12)$$

$$\sigma(v, \rho_1) \cdot n = t, \quad \text{sobre } \Gamma_t; \quad (13)$$

$$v = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_u. \quad (14)$$

Varição em  $v$ : Os cálculos para esta variação são análogos aos cálculos da variação em  $u$  e por isso são omitidos neste texto. As equações de Euler-Lagrange obtidas são:

$$\nabla \cdot \sigma(u, \rho_1) - rh(\rho_1, \rho_2) \cdot u + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \quad (15)$$

$$\sigma(u, \rho_1) \cdot n = t, \quad \text{sobre } \Gamma_t; \quad (16)$$

$$u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_u. \quad (17)$$

A partir das equações (12)-(14) e (15)-(17), conclui-se que  $u = v$ . Estas equações são restrições de equilíbrio, correspondentes à restrição de igualdade do problema (1).

Varição em  $\rho_1$ : A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  em relação à variável de projeto  $\rho_1$  na direção de  $\alpha_3$  é denotada por  $\delta_{\rho_1} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3)$ . Fazendo  $\delta_{\rho_1} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3) = 0$ , segue que  $-\delta_{\rho_1} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_3) + \delta_{\rho_1} w_1(\rho_1, \Lambda, \lambda; \alpha_3) = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} \delta_{\rho_1} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_3) &= \int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_1}(c(\rho_1); \alpha_3) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} ru \cdot \delta_{\rho_1}(h(\rho_1, \rho_2); \alpha_3) \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3)^p c^0 \right]_{\xi=0} : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} ru \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3)^p \rho_2^p h^0 \right]_{\xi=0} \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : [p \rho_1^{p-1} \alpha_3 c^0] : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} ru \cdot [p \rho_1^{p-1} \alpha_3 \rho_2^p h^0] \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : \alpha_3 \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \alpha_3 u \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot v d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $\frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} = p \rho_1^{p-1} c^0$  e  $\frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} = p \rho_1^{p-1} \rho_2^p h^0$ ; e também que

$$\begin{aligned} \delta_{\rho_1} w_1(\rho_1, \Lambda, \lambda; \alpha_3) &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \delta \rho_1 d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda_2) \delta \rho_1 d\Omega \\ &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda_2) \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega \\ &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \alpha_3 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \alpha_3 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_2 \alpha_3 d\Omega. \end{aligned} \quad (19)$$

Considerando que  $v = u$  e os resultados de (18) e (19) na equação  $-\delta_{\rho_1} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_3) + \delta_{\rho_1} w_1(\rho_1, \Lambda, \lambda; \alpha_3) = 0$ , obtem-se que

$$\int_{\Omega} \alpha_3 \left[ -S(u) : \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(u) - ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot u + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 \right] d\Omega = 0, \quad (20)$$

para todo  $\alpha_3$  admissível, de modo que, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, segue que

$$-S(u) : \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(u) - ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot u + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \text{ em } \Omega. \quad (21)$$

De acordo com [1], valem as seguintes condições para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_1(\rho_1 - 1) = 0$  e  $\lambda_2(\rho_{1_{min}} - \rho_1) = 0$ , o que indica que, para densidades intermediárias ( $\rho_{1_{min}} < \rho_1 < 1$ ), tem-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Assim, a equação (21) pode ser escrita como

$$S(u) : \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(u) + ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot u = \Lambda_1. \quad (22)$$

Variação em  $\rho_2$ : Os cálculos para esta variação são análogos aos cálculos da variação em  $\rho_1$  e por isso são omitidos neste texto. A equação obtida é:

$$ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \cdot u = \Lambda_2, \quad (23)$$

com  $\frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = p\rho_1^p \rho_2^{p-1} h^0$ .

As equações (22) e (23) são utilizadas na forma discretizada no algoritmo de otimização topológica bem como na etapa de PLS.

## 4 Exemplo numérico

O problema descrito na Seção 2 e as sensibilidades descritas na Seção 3 foram discretizados via MEF e a discretização do domínio de projeto consiste numa malha de  $50 \times 50$  elementos isoparamétricos bilineares. O algoritmo está fortemente baseado em [6].

O projeto ótimo é baseado na distribuição do material estrutural, o alumínio, cujo módulo de Young é  $E = 71 \times 10^9 N/m^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,33$ ; e do material referente aos atuadores, aqui considerado como um material fictício com rigidez superior à rigidez do material estrutural. A rigidez do material dos atuadores é modelada pela constante de peso  $r$  que atua de modo similar a rigidez de uma mola. Assumiu-se  $r = 1 \times 10^9$ . O material estrutural está relacionado à variável de projeto  $\rho_1$  enquanto o material dos atuadores está relacionado à  $\rho_2$ . Foi utilizado o Critério de Otimalidade (OC) padrão com raio de filtragem  $r_{min} = 1.2mm$  e coeficientes de penalização do modelo material  $p_1 = p_2 = 3$  [1,6] para evitar o surgimento de padrões de tabuleiro de xadrez. A atualização das variáveis de projeto  $\rho_1$  e  $\rho_2$  se deu via PLS.

O exemplo numérico consiste no projeto de otimização topológica de uma estrutura de formato L e da localização de atuadores proporcionais nela. A estrutura está engastada na parte superior e sujeita a um carregamento estático, conforme Figura 1(a). A força aplicada  $f$  é de  $-1 \times 10^8 N$ .

A Figura 1(b) mostra a topologia ótima obtida ao considerar  $\eta_1 = 0,5$ . As Figuras 1(c) e 1(d), obtidas com  $\eta_2 = 0,001$  e  $\eta_2 = 0,005$ , respectivamente, indicam o melhor local (ou região), em vermelho, para a colocação de um atuador proporcional. Em geral, e conforme observado nas Figuras 1(c) e 1(d), para um atuador do tipo proporcional, o melhor local para sua colocação é próximo ao local da aplicação da força, resultado que condiz com a física do problema. O critério de convergência de [6], que observa a mudança entre as densidades em iterações sucessivas, foi atingido em aproximadamente 90 iterações.

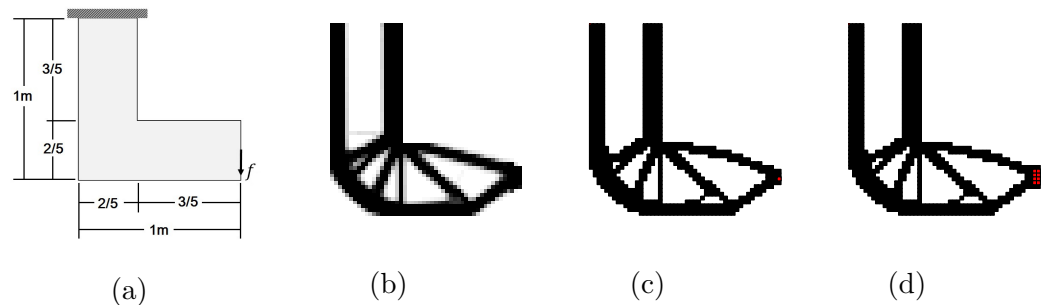


Figura 1: (a) domínio de projeto; (b) topologia ótima; (c) e (d) topologias ótimas com a indicação do melhor local (em vermelho) para a colocação de um atuador

## 5 Conclusões

Neste trabalho, a metodologia formulada possibilitou, via minimização simultânea da flexibilidade e da energia de controle do sistema, obter a topologia estrutural ótima e o melhor local para atuadores proporcionais na estrutura otimizada. A modelagem matemática do problema de otimização e os cálculos referentes à análise de sensibilidade podem servir de base para problemas similares como, por exemplo, quando os atuadores são do tipo piezoelétricos. Por fim, o foco no aspecto teórico do problema investigado visa proporcionar uma compreensão clara do desenvolvimento matemático necessário para a implementação computacional de problemas similares ao considerado neste estudo.

## Referências

- [1] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization - theory, methods and applications*. Springer, Berlin, 2003.
- [2] Y. Deng, Z. Liu, Y. Liu and Y. Wu. Combination of topology optimization and optimal control method, *Journal of Computational Physics*, 257:374–399, 2014.
- [3] A. Molter, O. A. A. da Silveira, V. Bottega and J. S. O. Fonseca. Integrated topology optimization and optimal control for vibration suppression in structural design, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47:389–397, 2013.
- [4] J.-S. Ou and N. Kikuchi. Integrated optimal structural and vibration control design, *Structural Optimization*, 12:209–216, 1996a.
- [5] J.-S. Ou and N. Kikuchi. Optimal design of controlled structures, *Structural Optimization*, 11:19–28, 1996b.
- [6] O. Sigmund. A 99 line topology optimization code written in Matlab, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21:120–127, 2001.
- [7] B. Xu, J. P. Ou and J. S. Jiang. Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm, *Finite Elements in Analysis and Design*, 64:1–12, 2013.