Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Abordagem Fuzzy do Problema dos Mínimos Quadrados

Eduardo Silva Palmeira[1]
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, Ilhéus, BA
Vinicius Nascimento Rufino[2]
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, Ilhéus, BA
Gildson Queiroz de Jesus[3]
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, Ilhéus, BA

Resumo. O Problema dos Mínimos Quadrados (PMQ) é um dos mais antigos e utilizados métodos de estimação de variáveis. Desde sua origem, diversas versões e propostas já foram estudadas e desenvolvidas com uma grande variação de métodos e aplicações. Em sua versão clássica determinística, o problema parte da estimação de uma variável em um sistema de equações inconsistente. Este trabalho propõe uma versão fuzzy para este problema onde, a partir das características intrínsecas da variável fuzzy próprias para modelagem de inconsistências e utilizando sua relação com a matemática intervalar, pretende-se formular uma versão mais completa para o PMQ.

Palavras-chave. Problema dos Mínimos Quadrados, Otimização Fuzzy, Matemática Intervalar

1 Introdução

O Problema dos Mínimos Quadrados (PMQ) tem sido amplamente aplicado em diversas áreas do conhecimento com o objetivo de encontrar estimativas ótimas de determinadas variáveis [5]. A depender da natureza do problema, o PMQ clássico pode ser formulado de diferentes formas. Para o caso determinístico por exemplo a formulação do problema consiste na estimativa ótima da solução de um sistema de equações inconsistente e sobredeterminado do tipo $Ax \cong y$. Essa formulação parte do princípio de que uma estimação é necessária devido a erros contidos em y, assumindo assim que A está livre de erros. Porém, em muitos casos essa é uma abordagem irreal, pois erros de diversas naturezas como: de modelagem, instrumentais e erros de amostragem podem implicar em erros também na matriz A. Com isso, apesar das inegáveis vantagens dessa abordagem e de diversas outras já desenvolvidas, os estudos nesta área ainda persistem na busca de formulações alternativas que sejam mais abrangentes.

Nesse contexto, a teoria dos conjuntos fuzzy tem se mostrado bastante útil na busca por solução de problemas com características imprecisas, incompletas e inconsistentes [4].

[1]espalmeira@uesc.br
[2]vrufino@ymail.com
[3]gildsonj@gmail.com

Proposta por Zadeh [6] em 1965, essa teoria traz para a teoria usual de conjuntos uma extensão definindo infinitos possíveis graus de pertinência para um determinado elemento em conjuntos com características imprecisas. Nota-se então a viabilidade da versão fuzzy do PMQ proposta nesse trabalho, onde através das características intrínsecas da variável fuzzy, as imprecisões contidas nesse problema de estimação podem ser melhor modeladas.

Desde sua origem a teoria dos conjuntos fuzzy possui uma forte relação com a matemática intervalar. Nesse trabalho essa forte relação também se destaca, onde a formulação do PMQ fuzzy passa pela obtenção de uma versão intervalar do problema a partir dos conjuntos suporte das variáveis fuzzy. Dado isso, a partir da estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial intervalar proposta em [1] foi desenvolvida nesse trabalho uma estrutura de espaço vetorial normado intervalar sobre o corpo dos intervalos para construção e solução da versão do PMQ aqui proposta.

2 Problema dos Mínimos Quadrados Clássico

Considere um sistema de equações lineares sobredeterminado e inconsistente $Hx \cong y$, onde H é uma matriz $m \times n$, com $m \geq n$, conhecida, y um vetor $m \times 1$ dado e x um vetor $n \times 1$ desconhecido. Sendo o sistema inconsistente, então y não pertence ao espaço coluna da matriz H, isto significa, que $y = Hx + v$, para algum vetor $v_{m\times 1}$ chamado de vetor resíduo. Assim, uma solução mínimos quadrados $\widehat{x}$, é o vetor que minimiza o comprimento do vetor resíduo que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\left\|y - H\widehat{x}\right\|^2 \leq \left\|y - Hx\right\|^2, \tag{1}$$

para todo x. A solução do PMQ clássico determinístico é dada por

$$\widehat{x} = \left(H^* H\right)^{-1} H^* y. \tag{2}$$

3 Problema dos Mínimos Quadrados Fuzzy

Como já visto, o PMQ clássico determinístico surge de um sistema de equações lineares sobredeterminado e inconsistente $Hx \cong y$, sendo H, y conhecidos e x a variável a ser estimada. A versão fuzzy que propomos aqui desse problema, tem o intuito de adicionar à versão determinística do PMQ clássico a inconsistência presente nas entradas H e y, possivelmente oriundas de erros de modelagem, instrumentação, amostragem, etc. Fazemos isso transformando os números em H, x e y em números triangulares fuzzy do tipo $X = (m, a, b)_T$, a definição de um número triangular fuzzy é dada a seguir:

Definição 3.1. *[2] Sejam L, R funções reais pares, não-crescentes em $[0, \infty)$, satisfazendo $L(0) = R(0) = 1$. Um número fuzzy é todo subconjunto fuzzy definido por*

$$X(u) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-u}{a}\right) & para\ u \leq m,\ a > 0, \\ R\left(\dfrac{u-m}{b}\right) & para\ u \geq m,\ b > 0 \end{cases} \tag{3}$$

e denotado por $X = (m, a, b)_{LR}$. *Se* L, R *são da forma*

$$T(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & se\ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & demais\ casos, \end{cases} \tag{4}$$

então $X = (m, a, b)_T$ *é dito ser um número fuzzy triangular.*

Um outro conceito importante ligado à teoria dos conjunto fuzzy é o de α-corte, isto é, os subconjuntos de X dados por $[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, para todo $\alpha \in (0, 1]$, que são intervalos fechados contidos em $[0, 1]$. Note que um conjunto fuzzy $\widetilde{A}$ de X pode ser expresso em termos das funções característica dos seus α-cortes $\chi_{[A]^\alpha}$, através da função de pertinência $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \min(\alpha, \chi_{[A]^\alpha}(x))$, para cada $x \in X$.

Note que o conjunto suporte de um número fuzzy triangular $(m, a, b)_T$ dado por $suppA := \{x \in X : \mu_A(x) \neq 0\}$ tem como fecho justamente o intervalo $[m - a, m + b]$, ou seja, $(m, a, b)_T$ fica totalmente caracterizado pelo fecho do seu suporte. Isso nos dá a segurança de trabalhar sempre com os intervalos $[m - a, m + b]$ e que a recuperação da informação fuzzy (o número fuzzy associado a esse intervalo) pode ser sempre feita através da função de pertinência μ_A, definida no final do parágrafo anterior. Por simplicidade, daqui em diante denotaremos por $X = (x, \underline{x}, \overline{x})_T$ os números fuzzy triangulares tais que seu suporte é dado pelo conjunto $[\underline{x}, \overline{x}]$.

Logo, considerando $\tilde{H}$ uma matriz de números fuzzy triangulares e $\tilde{x}, \tilde{y}$ vetores de números fuzzy triangulares, isto é

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} (H_{11}, \underline{h}_{11}, \overline{h}_{11})_T & (H_{12}, \underline{h}_{12}, \overline{h}_{12})_T & \cdots & (H_{1n}, \underline{h}_{1n}, \overline{h}_{1n})_T \\ (H_{21}, \underline{h}_{21}, \overline{h}_{21})_T & (H_{22}, \underline{h}_{22}, \overline{h}_{22})_T & \cdots & (H_{2n}, \underline{h}_{2n}, \overline{h}_{2n})_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (H_{m1}, \underline{h}_{m1}, \overline{h}_{m1})_T & (H_{m2}, \underline{h}_{m2}, \overline{h}_{m2})_T & \cdots & (H_{mn}, \underline{h}_{mn}, \overline{h}_{mn})_T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1, \underline{x}_1, \overline{x}_1)_T \\ (x_2, \underline{x}_2, \overline{x}_2)_T \\ \vdots \\ (x_n, \underline{x}_n, \overline{x}_n)_T \end{bmatrix} \ e\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} (y_1, \underline{y}_1, \overline{y}_1)_T \\ (y_2, \underline{y}_2, \overline{y}_2)_T \\ \vdots \\ (y_m, \underline{y}_m, \overline{y}_m)_T \end{bmatrix}. \tag{5}$$

o problema dos mínimos quadrados pode ser reformulado por $\tilde{y} = \tilde{H}\tilde{x}$, o qual chamamos de PMQ fuzzy. O Lema a seguir é fundamental para a solução do PMQ fuzzy.

Lema 3.1. *[7] Sejam* $\tilde{H}$ *uma matriz e* $\tilde{x}, \tilde{y}$ *vetores de números fuzzy triangulares. O número fuzzy* $\hat{x}$ *é uma solução ótima para o PMQ fuzzy* $\tilde{H}\tilde{x} \cong \tilde{y}$ *se, e somente se cada* $\alpha \in (0, 1]$, *o vetor intervalar* $[\hat{x}]^\alpha$ *é uma solução ótima do PMQ intervalar* $[\tilde{H}]^\alpha[\tilde{x}]^\alpha \cong [\tilde{y}]^\alpha$.

Assim, a partir do Lema (3.1) torna-se plausível encontrar uma solução para o PMQ fuzzy transformando-o num problema intervalar e, em seguida, recuperar a informação fuzzy a partir dos conjuntos suporte. Dada a natureza desse problema, para a construção dessa versão é necessária uma estrutura de espaço vetorial intervalar normado assim como temos em $\mathbb{R}^n$ no caso clássico. Seja então $M = I(\mathbb{R}) \cup \overline{I(\mathbb{R})}$, onde $I(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \overline{a}] : \underline{a} \leq \overline{a}\ e\ \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}\}$ e $\overline{I(\mathbb{R})} = \{[\underline{a}, \overline{a}] : [\overline{a}, \underline{a}] \in I(\mathbb{R})\}$ [1]. Munindo M das operações $+_M$ e $\cdot_M$ dadas por

$$[a_1, a_2] +_M [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]\ \ e\ \ [a_1, a_2] \cdot_M [b_1, b_2] = [a_1 b_1, a_2 b_2] \tag{6}$$

É verificado que $(M, +_M, \cdot_M)$ possui uma estrutura de corpo. Sendo $a, b, c \in M$ tais que $a = [a_1, a_2], b = [b_1, b_2]$ e $c = [c_1, c_2]$, tem-se que

$A_1)$ $a + b = b + a, \ \forall a, b \in M$;

$A_2)$ $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \forall a, b, c \in M$;

$A_3)$ Seja $0 = [0, 0]$ o elemento neutro da adição que satisfaz $a + 0 = a$.

$A_4)$ Seja $-a = [-a_1, -a_2]$ o inverso aditivo de $a = [a_1, a_2]$ que satisfaz $a + (-a) = 0$.

$M_1)$ $a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a, b \in M$;

$M_2)$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a, b, c \in M$;

$M_3)$ Seja $1 = [1, 1]$ o elemento neutro multiplicativo que satisfaz $a \cdot 1 = a$.

$M_4)$ Seja $a^{-1} = [a_1^{-1}, a_2^{-1}]$ o inverso multiplicativo de $a = [a_1, a_2]$ que satisfaz

$$a \cdot a^{-1} = [a_1, a_2] \cdot [a_1^{-1}, a_2^{-1}] = [a_1 a_1^{-1}, a_2 a_2^{-1}] = [1, 1].$$

$D)$ $(a + b)c = ac + bc, \ \forall a, b, c \in M$.

Portanto, $(M, +_M, \cdot_M)$ é corpo. Pelo limite de espaço, não foi possível apresentar as provas de cada item, as mesmas podem ser encontradas com detalhes em [7].

Generalizando essas operações para M^n, de forma que

$$\begin{aligned}([a_1, a_2], ..., [a_{2n-1}, a_{2n}]) +_{\overline{M}} ([b_1, b_2], ..., [b_{2n-1}, b_{2n}]) = \\ = ([a_1 + b_1, a_2 + b_2], ..., [a_{2n-1} + b_{2n-1}, a_{2n} + b_{2n}])\end{aligned} \tag{7}$$

e

$$[\alpha_1, \alpha_2] \cdot_{\overline{M}} ([b_1, b_2], ..., [b_{2n-1}, b_{2n}]) = ([\alpha_1 b_1, \alpha_2 b_2], ..., [\alpha_1 b_{2n-1}, \alpha_2 b_{2n}]) \tag{8}$$

chega-se ao fato de que $(M^n, +_{\overline{M}}, \cdot_{\overline{M}})$ é um M-espaço vetorial. Pois, sendo $a, b, c \in M^n$ tais que $a = ([a_1, a_2], [a_3, a_4], ..., [a_{2n-1}, a_{2n}])$, $b = ([b_1, b_2], [b_3, b_4], ..., [b_{2n-1}, b_{2n}])$ e $c = ([c_1, c_2], [c_3, c_4], ..., [c_{2n-1}, c_{2n}])$, tem-se que

$A_1)$ $a + b = b + a, \ \forall a, b \in M^n$;

$A_2)$ $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in M^n$;

$A_3)$ Existe o vetor nulo dado por $0 = ([0, 0], ..., [0, 0])$ tal que $a + 0 = a$.

$A_4)$ Para cada vetor $a \in M^n$ existe um vetor em $-a \in M^n$ dado por $-a = ([-a_1, -a_2], ..., [-a_{2n-1}, -a_{2n}])$ tal que $a + (-a) = 0$.

$M_1)$ $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \ \forall \alpha, \beta \in M$ e $\forall a \in M^n$;

$M_2)$ Seja $1 = [1, 1]$ o elemento identidade, tal que $1 \cdot a = a$.

$D_1)$ $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b,\ \forall \alpha \in M$ e $a, b \in M^n$;

$D_2)$ $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a,\ \forall \alpha, \beta \in M$ e $\forall a \in M^n$.

Logo, M^n é um M-espaço vetorial.

Sejam $A, B \in M^n$ tais que $A = ([\underline{a}_1, \overline{a}_1], [\underline{a}_2, \overline{a}_2], ..., [\underline{a}_n, \overline{a}_n])$ e $B = ([\underline{b}_1, \overline{b}_1], [\underline{b}_2, \overline{b}_2], ..., [\underline{b}_n, \overline{b}_n])$. Procurando munir M^n de um produto interno, considere a seguinte operação:

$$\langle A, B\rangle_I = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i \underline{b}_i, \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \overline{b}_i\right]. \tag{9}$$

Verificando se esta operação satisfaz as propriedades de produto interno, tem-se que:

$P_1)$ $\langle A+B, C\rangle_I = \langle A, C\rangle_I + \langle B, C\rangle_I,\ \forall A, B, C \in M^n$;

$P_2)$ $\langle \lambda A, B\rangle_I = \lambda\langle A, B\rangle_I,\ \forall A, B \in M^n$ e $\lambda \in M$;

$P_3)$ $\langle A, B\rangle_I = \langle B, A\rangle_I,\ \forall A, B \in M^n$;

$P_4)$ $\langle A, A\rangle_I >_{\varphi_1} [0,0]$, se $A \neq 0,\ \forall A \in M^n$.

Logo, $\langle\ ,\ \rangle_I$ é um produto interno em M^n. A partir do produto interno intervalar define-se uma norma em M^n da seguinte forma: $\left\|A\right\|_I = \sqrt{\langle A, A\rangle_I}$.

Com os fundamentos teóricos estabelecidos, a solução do PMQ intervalar pode ser encontrada através de uma interpretação geométrica. Dado que, o sistema intervalar $y_I - H_I x_I$ é inconsistente, temos que y_I não é um elemento de $C(H_I)$, o espaço coluna de H_I. Devemos então encontrar um vetor $\hat{x_I}$ que torne $H_I x_I$ o mais próximo possível de y_I, ou seja, minimizar $\left\|H_I x_I - y_I\right\|_I^2$. Temos a partir da teoria usual de espaços vetoriais que é único o $\hat{x_I} \in M^n$, tal que $y_I - H_I\hat{x_I} \in C(H_I)^\perp$. Assim, $H_I\hat{x_I} = proj_{C(H_I)}\ y_I$. É garantido também que

$$\left\|H_I\hat{x_I} - y_I\right\|_I < \left\|H_I x_I - y_I\right\|_I,\ \forall x \in M^n\ e\ x_I \neq \hat{x_I}. \tag{10}$$

Temos também que $C(H_I)^\perp = N(H_I^*)$, sendo $N(H_I^*)$ o espaço nulo da transposta de H_I. Da equação $H_I\hat{x_I} = proj_{C(H_I)}\ y_I$, obtemos

$$\begin{aligned} H_I\hat{x_I} = proj_{C(H_I)}\ y_I \Rightarrow H_I\hat{x_I} - y_I \in C(H_I)^\perp \Rightarrow H_I\hat{x_I} - y_I \in N(H_I^*) \\ \Rightarrow H_I^*(H_I\hat{x_I} - y_I) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Logo, o vetor ótimo $\hat{x_I}$ procurado é o vetor que satisfaz $H_I^* H_I\hat{x_I} = H_I^* y_I$.

Temos então, que a solução para o PMQ intervalar, segue o mesmo formato da solução do PMQ clássico, fato já esperado devido a forma como foi construído o espaço vetorial intervalar, porém trazendo as vantagens desse tipo de variável. O $\hat{x_I}$ ótimo então que minimiza o quadrado da norma do vetor resíduo $y_I - H_I x_I$, sendo H_I matriz intervalar e x_I, y_I vetores intervalares, é dado por $\hat{x_I} = (H_I^* H_I)^{-1} H_I^* y_I$.

A informação fuzzy é recuperada a partir da solução intervalar tomando os pontos médios dos intervalos suportes encontrados na solução como valores principais dos números triangulares fuzzy.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0415

4 Exemplo Numérico

Nesta seção será apresentado um exemplo numérico comparando o PMQ fuzzy com o PMQ clássico. Primeiramente, vamos resolver o PMQ clássico. Para tanto, foram usados os seguintes valores de H e y, para um sistema $Hx \cong y$ sobredeterminado e inconsistente:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} e \ y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

A solução do PMQ clássico é dada pelo seguinte vetor ótimo $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.240290 \\ 0.150707 \\ 0.733158 \\ -0.307831 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Para o PMQ fuzzy, os valores de entrada H e y em (12), são transformados em números fuzzy triangulares representados por $(m, a, b)_T$, onde m é o valor principal (que tem grau de pertinência 1) e $[a, b]$ é o conjunto suporte do número. Para os valores de entrada, o intervalo suporte será formado com um erro de 1 para esquerda e para a direta. O problema então passa a ter os seguintes valores de entrada:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} (2,1,3)_T & (7,6,8)_T & (6,5,7)_T & (1,0,2)_T \\ (3,2,4)_T & (9,8,10)_T & (2,1,3)_T & (5,4,6)_T \\ (7,6,8)_T & (2,1,3)_T & (9,8,10)_T & (1,0,2)_T \\ (1,0,2)_T & (4,3,5)_T & (8,7,9)_T & (4,3,5)_T \\ (6,5,7)_T & (8,7,9)_T & (5,4,6)_T & (3,2,4)_T \end{bmatrix} e \ \tilde{y} = \begin{bmatrix} (6,5,7)_T \\ (3,2,4)_T \\ (9,8,10)_T \\ (5,4,6)_T \\ (4,3,5)_T \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Resolvendo o PMQ fuzzy através da versão intervalar dos valores de entrada em (14), tomando os conjuntos suportes dos números fuzzy triangulares, temos que a solução do PMQ intervalar, é dada pelo seguinte vetor intervalar ótimo $\hat{x}_I$:

$$\hat{x}_I = \begin{bmatrix} [0.231083, 0.246429] \\ [0.142279, 0.155167] \\ [0.716945, 0.742745] \\ [-0.332553, -0.291306] \end{bmatrix} \tag{15}$$

A comparação dos resultados do PMQ clássico e do PMQ fuzzy, é dada na tabela abaixo: Pode-se observar que todos os valores do $\hat{x}$ do PMQ clássico estão dentro dos intervalos

Tabela 1: Comparação entre as versões do PMQ clássico e o PMQ fuzzy.

	$\underline{\hat{x}}$	$\hat{x}_{classico}$	$\overline{\hat{x}}$
$\hat{x}_1$	0.231083	0.240290	0.246429
$\hat{x}_2$	0.142279	0.150707	0.155167
$\hat{x}_3$	0.716945	0.733158	0.742745
$\hat{x}_4$	−0.332553	−0.307831	−0.291306

suporte do $\hat{x}_I$ do PMQ intervalar, o que mostra um comportamento adequado para o solução da nova versão do PMQ nesse caso analisado.

5 Conclusões

Uma das principais características da versão do PMQ desenvolvida nesse trabalho a ser destacada é o seu caráter de ineditismo, pois não se encontra nenhuma abordagem similar a criada nesse trabalho dentro da literatura. Pode-se destacar também as vantagens de se trabalhar com essa versão em diferentes aplicações, pois a partir das características da variável fuzzy, esse modelo oferece um controle maior de possíveis imprecisões contidas na formulação inicial do problema. Dessa forma, as informações relacionadas a essas possíveis inconsistências são carregadas durante o desenvolvimento do problema e podem ser traduzidas da solução obtida.

Agradecimentos

Agradecimentos ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz (PPGMC/UESC) onde este trabalho foi desenvolvido e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento dessa pesquisa.

Referências

[1] T. M. Costa, Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwickand, and G. N. Silva, Generalized interval vector spaces and interval optimization, *Information Sciences*, 311:74-85, 2015. DOI:10.1016/j.ins.2015.03.033.

[2] P. Diamond, Fuzzy Least Squares, *Information Sciences*, 46:141-157, 1988. DOI:10.1016/0020-0255(88)90047-3.

[3] T. Kailath, A. Sayed, and B. Hassibi. *Linear Estimation*. Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[4] Z. Makó, Real vector space of LR-fuzzy intervals with respect to the shape-preserving t-norm-based addition, *Fuzzy Sets and Systems*, 200:136-149, 2012. DOI:10.1016/j.fss.2012.02.014.

[5] K. Saksela, J. Botts, and L. Savioja, Optimization of absorption placement using geometrical acoustic models and least squares, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4):274-280, 2015. DOI:10.1121/1.4915063.

[6] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8:338-353, 1965. DOI:10.1016/s0019-9958(65)90241-X.

[7] V. N. Rufino, Análise da Influência de uma Variável Fuzzy no Problema dos Mínimos Quadrados, Dissertação de Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, UESC, (2016).

