Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Fechamento Não-Local da Equação de Advecção-Difusão Utilizando Diferentes Métodos de Inversão Numérica para a Transformada de Laplace

Camila Pinto da Costa[1]
Departamento de Matemática e Estatística, UFPel, Pelotas, RS
Karine Rui[2]
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, UFPel

Resumo. Neste trabalho apresenta-se a resolução da equação de advecção-difusão tridimensional estacionária obtida através da técnica GIADMT (*Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique*), considerando o fechamento não-local para o fluxo turbulento. Foram consideradas duas parametrizações diferentes para o termo do contragradiente e utilizados diferentes métodos de inversão numérica para a transformada inversa de Laplace. Comparou-se os resultados com os dados medidos no experimento de Copenhagen através de uma avaliação dos índices estatísticos a fim de comparar a solução da equação através dos métodos de inversão numérica. Utilizou-se diferentes parametrizações para o coeficiente de difusão turbulento vertical e o perfil do vento. Os resultados apresentaram uma boa concordância com o experimento.

Palavras-chave. Fechamento Não-Local, Inversão Numérica, Dispersão de Poluentes

1 Introdução

Na dispersão e transporte de contaminantes na baixa atmosfera pode-se empregar a equação de advecção-difusão. Nela tem-se o chamado problema de fechamento que ocorre quando existe maior número de incógnitas do que de equações. Uma forma de solucionar este problema é determinar o fechamento das equações dos fluxos turbulento. Para isso, pode-se utilizar a teoria K que é baseada no transporte por gradiente, no qual em analogia com a difusão molecular assume que o fluxo de qualquer propriedade é proporcional ao gradiente de seu campo médio [1], e assume que os fluxos turbulentos são dirigidos para baixo do gradiente médio. Esta teoria é conhecida como fechamento local, porém ela não leva em conta o caráter não homogêneo da turbulência na camada limite convectiva (CLC), que ocorre quando os movimentos convectivos dominam o transporte e o processo difusivo. Para considerar a não homogeneidade da turbulência o fechamento não-local é considerado, assim os fluxos de contragradiente são pensados para ser um indicativo de turbilhões de escala na CLC e são chamados de fluxos não-locais.

[1]camiladacosta@gmail.com
[2]karinerui@gmail.com

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0406

A equação de advecção-difusão pode ser resolvida através da aplicação da transformada de Laplace. O uso desta transformada resulta em soluções que por vezes uma inversa analítica é difícil de obter. Quando isso ocorre, métodos numéricos de inversão são fundamentais para determinar a solução final da equação.

Neste trabalho, é resolvida a equação de advecção-difusão tridimensional estacionária através do GIADMT [2] considerando o fechamento não-local da turbulência. Para o termo do contragradiente foi considerada a parametrização proposta por Cuijpers e Holtslag (1998) [3] e também a parametrização proposta por Roberti et al. (2004) [4]. Três métodos de inversão numérica da transformada de Laplace são avaliados a fim de analisar a solução não-local da equação de advecção-difusão de forma comparativa: o Algoritmo de Fixed-Talbot (FT) [5], Quadratura de Gauss [6] e um método baseado na série de Fourier [7]. Diferentes parametrizações para o perfil do vento e o coeficiente de difusão turbulento vertical, válidas para condições atmosféricas instáveis, são utilizadas para avaliar o modelo e compará-lo com os dados medidos no experimento de Copenhagen [8].

2 Resolução do Modelo Matemático via GIADMT

A equação de advecção-difusão que modela a dispersão de poluentes na atmosfera pode ser escrita como:

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} = -\frac{\partial \overline{v'c'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'c'}}{\partial z} + S\,, \tag{1}$$

onde $\overline{u}$ denota a velocidade média do vento na direção horizontal, $\overline{c}$ denota a concentração média de poluentes, $\overline{v'c'}$ e $\overline{w'c'}$ representam, respectivamente, os fluxos turbulentos de contaminantes nas direções y e z e S é o termo fonte.

O fechamento dos fluxos turbulentos pode ser realizado pela teoria K, que estabelece que os fluxos são proporcionais aos gradientes médios de difusão, no qual $\overline{v'c'} = -K_y\frac{\partial \overline{c}}{\partial y}$, onde K_y é o coeficiente de difusão lateral. Ou pelo fechamento não-local, no qual Deardorff [9] propôs a inclusão de um termo de contragradiente para descrever a difusão também nas regiões superiores da CLC, no qual $\overline{w'c'} = -K_z\left(\frac{\partial \overline{c}}{\partial z} - \gamma\right)$, onde K_z é o coeficiente de difusão vertical e γ é o termo de contragradiente.

Considera-se para o termo do contragradiente duas parametrizações diferentes:

- Parametrização de Cuijpers e Holtslag [3]: $\gamma_1 = \frac{b w_*^2 \overline{c}}{\sigma_w^2 h}$, onde b é uma constante, w_* é a velocidade escalar convectiva, h é a altura da CLC e σ_w é o desvio padrão vertical da velocidade turbulenta descrito por Sorbjan [10]: $\sigma_w^2 = 1.8\left(\frac{z}{h}\right)^{2/3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^{2/3} w_*^2$. Para facilitar a notação, define-se: $\beta_1 = \frac{b w_*^2}{\sigma_w^2 h}$ e, assim, tem-se que: $\gamma_1 = \beta_1(z)\overline{c}(x,y,z)$.

- Parametrização de Roberti [4]: $\gamma_2 = 0.085\frac{q_w}{\Psi}\left(\frac{h}{z}\right)^{2/3}\frac{\overline{c}}{h}$, onde $\Psi = 0.913$ é a função de dissipação adimensional e q_w é a função de estabilidade dada por:
$q_w = z\left[0.594h\left(1-e^{-4(z/h)} - 0.0003e^{8(z/h)}\right)\right]^{-1}$. Define-se, $\beta_2 = \frac{0.085}{h}\frac{q_w}{\Psi}\left(\frac{h}{z}\right)^{2/3}$, assim, pode-se escrever: $\gamma_2 = \beta_2(z)\overline{c}(x,y,z)$.

Substituindo na equação (1) o termo do fluxo turbulento da teoria K para a direção y

e do fechamento não-local para a direção z, obtém-se:

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{c}}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \overline{c}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \overline{c}}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \overline{c}}{\partial z}\right) + K_z \beta_\alpha \frac{\partial \overline{c}}{\partial z}\,, \tag{2}$$

para $0 < z < h$, $0 < y < L_y$ e $x > 0$, onde L_y é a distância da fonte e $\alpha = 1$ ou 2. A equação (2) está sujeita as seguintes condições de contorno: $-K_z\left(\frac{\partial \overline{c}}{\partial z} - \gamma_\alpha\right) = 0$ em $z = 0$ e $z = h$ e $-K_y\left(\frac{\partial \overline{c}}{\partial y}\right) = 0$ em $y = 0$ e $y = L_y$ e a condição de fonte, considerando uma taxa de emissão contínua de poluente, Q: $\overline{u}\,\overline{c}(0, y, z) = Q\delta(z - H_s)\delta(y - y_0)$ em $x = 0$ onde δ é a função Delta de Dirac, H_s é a altura da fonte e y_0 é a posição da fonte em y.

A solução da equação (2) é obtida com a aplicação do GIADMT [2]. Para resolver a equação usa-se a técnica ADMM (*Advection Diffusion Multilayer Method*) na qual a altura h da CLC é dividida em N subcamadas de forma que no interior de cada subcamada os coeficientes de difusão, a velocidade do vento e o termo de contragradiente assumem valores médios. E considera-se condições de continuidade para a concentração e fluxo de concentração nas interfaces.

Desta forma, o problema (2) é reformulado como um conjunto de problemas advectivo-difusivo com parâmetros constantes, onde para cada subcamada genérica tem-se:

$$\overline{u}_n \frac{\partial \overline{c}_n}{\partial x} = K_{y_n} \frac{\partial^2 \overline{c}_n}{\partial y^2} + K_{z_n} \frac{\partial^2 \overline{c}_n}{\partial z^2} + K_{z_n} \beta_{\alpha_n} \frac{\partial \overline{c}_n}{\partial z}\,, \tag{3}$$

com $z_{n-1} \leq z \leq z_n$ para $n = 1, \ldots, N$, onde $\overline{c}_n$ é a concentração média na enésima subcamada.

Para resolver a equação (3) aplica-se o método GITT (*Generalized Integral Transform Technique*) na direção y, no qual a variável $\overline{c}_n(x, y, z)$ é expandida pela série: $\overline{c}_n(x, y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{\overline{c}}_{jn}(x,z)\psi_j(y)}{\sqrt{N_j}}$, onde $\psi_j(y) = \cos(\lambda_j y)$ são as autofunções do problema auxiliar de Sturm-Liouville na variável y, $\lambda_j = j\pi/L_y$ os autovalores correspondentes e $N_j = \int_y \psi_j^2(y)\mathrm{d}y$ é a norma. Aplica-se a expansão em série da GITT na equação (3), faz-se uso da propriedade de ortogonalidade das autofunções. Por fim, aplica-se a transformada de Laplace na variável x e resolve-se a equação diferencial ordinária resultante, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{C}}_{j_n}(s, z) = A_n e^{(F_n + R_n)z} + B_n e^{(F_n - R_n)z} + \\ + \frac{Q\psi_j(y_0)}{2R_n K_{z_n}\sqrt{N_j}}\left[e^{(F_n - R_n)(z - H_s)} + e^{(F_n + R_n)(z - H_s)}\right] H(z - H_s)\,,\end{aligned} \tag{4}$$

para $n = 1, \ldots, N - 1$, onde H é a função de Heaviside e o último termo da equação (4) é a solução particular válida somente na região de emissão do poluente, onde $F_n = -\frac{\beta_{\alpha n}}{2}$ e $R_n = \frac{\sqrt{\beta_{\alpha_n}^2 + 4(\overline{u}_n s + K_{y_n}\lambda_j^2)/K_{z_n}}}{2}$. Para obter a solução final da equação aplica-se a transformada inversa de Laplace na equação (4) resultando:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{c}}_{j_n}(x, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{sx}\Bigg[A_n e^{(F_n + R_n)z} + B_n e^{(F_n - R_n)z} + \\ + \frac{Q\psi_j(y_0)}{2R_n K_{z_n}\sqrt{N_j}}\left[e^{(F_n - R_n)(z - H_s)} + e^{(F_n + R_n)(z - H_s)}\right] H(z - H_s)\Bigg]\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Devido à complexidade da integral de linha na equação (5) optou-se por resolvê-la numericamente. A fim de analisar o desempenho dos métodos numéricos de inversão, na solução da equação de advecção-difusão com fechamento não-local, buscou-se aplicar na resolução da equação algoritmos com bom desempenho e boa precisão. Foram utilizados para a transformada inversa de Laplace os seguintes métodos de inversão, onde obteve-se as concentrações finais dadas da forma:

- Método da Quadratura Gaussiana [6]:

$$\overline{c}_n(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_j(y)}{\sqrt{N_j}} \left\{ \sum_{k=1}^{N_p} \frac{p_k}{x} w_k \left[A_n e^{(F_n+R_n)z} + B_n e^{(F_n-R_n)z} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{Q\psi_j(y_0)}{2R_n K_{z_n}\sqrt{N_j}} \left[e^{(F_n-R_n)(z-H_s)} + e^{(F_n+R_n)(z-H_s)} \right] H(z-H_s) \right] \right\}, \qquad (6)$$

para $n = 1, \ldots, N$. As constantes w_k e p_k são, respectivamente, os pesos e as raízes da quadratura de Gauss e $R^*_{k,n} = \frac{\sqrt{\beta^2_{\alpha n} + 4(\overline{u}_n(p_k/x) + K_{y_n}\lambda^2_j)/K_{z_n}}}{2}$. $N_p = 8$ é o número de pontos da quadratura.

- Algoritmo de *Fixed-Talbot* (FT) [5]:

$$\overline{c}_n(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_j(y)}{\sqrt{N_j}} \left\{ \frac{r}{M^*} \left[\frac{1}{2} \overline{\overline{c}}_{j_n}(r,z) e^{rx} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{M^*-1} Re\left[e^{xs(\theta_k)} \overline{\overline{c}}_{j_n}(S(\theta_k), z)(1 + i\overline{w}(\theta_k)) \right] \right] \right\}, \qquad (7)$$

onde $S(\theta_k) = r\theta(\cot\theta + i)$, $\overline{\omega}(\theta_k) = \theta_k + (\theta_k \cot\theta_k - 1)\cot\theta_k$, $\theta_k = \dfrac{k\pi}{M^*}$, $-\pi < \theta < +\pi$, $r = \frac{2M^*}{101x}$ é um parâmetro baseado em experimentos numéricos, $i = \sqrt{-1}$ e $M^* = 100$ é o número de termos do somatório utilizado.

- Método baseado na série de Fourier [7]:

$$\overline{c}_n(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_j(y)}{\sqrt{N_j}} \frac{\exp(\gamma x)}{T} \left[\frac{1}{2} \overline{\overline{c}}_{j_n}(\gamma, z) + \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{N^*} \left\{ Re\left[\overline{\overline{c}}_{j_n}\left(\gamma + \frac{ik\pi}{T}, z\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) \right] - Im\left[\overline{\overline{c}}_{j_n}\left(\gamma + \frac{ik\pi}{T}, z\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right) \right] \right\} \right] \qquad (8)$$

onde γ e T são parâmetros livres. Os melhores resultados foram obtidos com $\gamma = 0.0001$, $T = 55000$ e $N^* = 1000$ foi o número de termos utilizado para o somatório.

2.1 Validação do Modelo

Foram utilizadas as seguintes fórmulas para a parametrização da turbulência, todas válidas para condições convectivas da atmosfera. Para o coeficiente de difusão vertical

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0406

utilizou-se as fórmulas propostas por: Pleim e Chang [11]: $K_z = kw_* z(1 - z/h)$, Degrazia et al. [12]: $\frac{K_z}{w_* h} = 0.22\left(\frac{z}{h}\right)^{1/3}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/3}\left[1 - \exp\left(-\frac{4z}{h}\right) - 0.0003\exp\left(\frac{8z}{h}\right)\right]$ e por Degrazia et al. [13]: $\frac{K_z}{w_* h} = \frac{0.09 c_w^{1/2}\psi^{1/3}(z/h)^{4/3}}{(f_m^*)_w^{4/3}} \int_0^\infty \frac{\sin\left[\frac{7.84 c_w^{1/2}\psi^{1/3}(f_m^*)_w^{2/3} X n}{(z/h)^{2/3}}\right]}{(1+n')^{5/3}} \frac{\mathrm{d}n'}{n'}$. Para o coeficiente de difusão lateral foi utilizada a fórmula sugerida por Degrazia et al. [12]: $K_y = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_v z}{16 (f_m)_v q_v}$. Para o perfil da velocidade do vento utilizou-se as duas parametrizações propostas por Panofsky e Dutton [14]: o perfil de vento potência: $\frac{\overline{u_z}}{\overline{u_1}} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^p$ e o perfil de vento logarítmico: $u = \frac{u_*}{k}\left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right)\right]$.

A fim de validar a solução da equação com fechamento não-local para os três métodos numéricos de inversão foram utilizados os dados medidos no experimento de Copenhagen [8]. Uma análise estatística, descrita por Hanna [15], foi realizada nos resultados obtidos:

- Erro quadrático médio normalizado: $NMSE = \overline{(C_o - C_p)^2}/\overline{C_o}\,\overline{C_p}$. (ideal: $NMSE = 0$)
- Coeficiente de correlação: $Cor = \overline{[(C_o - \overline{C_o})(C_p - \overline{C_p})]}/\sigma_o\sigma_p$. (ideal: $Cor = 1$)
- Fator de dois: $Fa2 = C_p/C_o \in [0.5, 2]$. (ideal: $Fa2 = 1$)
- Erro fracional: $Fb = (\overline{C_o} - \overline{C_p})/(0.5(\overline{C_o} + \overline{C_p}))$. (ideal: $Fb = 0$)
- Desvio padrão fracional: $Fs = (\sigma_o - \sigma_p)/(0.5(\sigma_o + \sigma_p))$. (ideal: $Fs = 0$)

onde o subscrito "o" indica as quantidades observadas nos experimentos, o subscrito "p" as quantidades preditas pelo modelo, C a concentração de poluentes e σ é o desvio padrão.

3 Resultados

As soluções da equação de advecção-difusão tridimensional estacionária com fechamento não-local, dadas pelas equações (6), (7) e (8), obtidas com os três métodos de inversão numérica para a transformada de Laplace, foram comparadas com os dados observados no experimento de Copenhagen e avaliadas através de índices estatísticos descritos por [15]. A comparação dos dados observados no experimento confrontado com os dados simulados pelas soluções (6), (7) e (8) foi realizada para diferentes parametrizações do coeficiente de difusão vertical, perfil do vento e os dois termos do contragradiente.

Na Tabela 3 apresentam-se os índices estatísticos descritos por [15] dos dados observados no experimento confrontado com os dados simulados pelas soluções com os três métodos de inversão numérica para a transformada de Laplace e os termos de contragradiente de Cuijpers e Holtslag [3], γ_1, e de Roberti et al. [4], γ_2, considerando as diferentes parametrizações do coeficiente de difusão vertical e o perfil de vento.

Analisando a Tabela 3 nota-se boa concordância entre os valores calculados no modelo e os dados experimentais, pois se observa que os índices estatísticos estão se aproximando de seus valores ideais. Os três métodos de inversão numérica apresentaram a mesma eficácia para o modelo, não mostrando diferenças significativas nos resultados entre eles ao utilizar diferentes parametrizações da turbulência e os dois termos de contragradiente. O método baseado na série de Fourier apresentou resultados levemente melhores quando comparado com os demais métodos de inversão.

Tabela 1: Índices estatísticos do modelo com o termo de contragradiente de [3] e [4] com diversas parametrizações da turbulência para diferentes métodos de inversão numérica.

K_z $\overline{u}$	Inver-são	*NMSE*		*Cor*		*Fa2*		*Fb*		*Fs*	
		γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	Gauss	0.34	0.42	0.811	0.814	0.739	0.696	0.31	0.40	0.10	0.17
	FT	0.36	0.37	0.820	0.823	0.783	0.739	0.35	0.36	0.15	0.17
	Fourier	0.26	0.32	0.834	0.838	0.826	0.826	0.24	0.32	0.05	0.13
2	Gauss	0.30	0.36	0.808	0.811	0.783	0.739	0.24	0.33	0.02	0.10
	FT	0.31	0.32	0.815	0.819	0.783	0.783	0.28	0.29	0.08	0.10
	Fourier	0.24	0.28	0.830	0.834	0.826	0.826	0.18	0.26	−0.02	0.06
3	Gauss	0.31	0.39	0.840	0.846	0.783	0.739	0.31	0.41	0.14	0.22
	FT	0.36	0.37	0.841	0.844	0.783	0.783	0.37	0.38	0.21	0.23
	Fourier	0.25	0.31	0.853	0.860	0.826	0.739	0.26	0.35	0.10	0.19
4	Gauss	0.26	0.33	0.834	0.841	0.826	0.696	0.24	0.34	0.05	0.15
	FT	0.30	0.31	0.837	0.840	0.826	0.783	0.30	0.32	0.13	0.15
	Fourier	0.22	0.26	0.847	0.855	0.826	0.826	0.19	0.28	0.03	0.12
5	Gauss	0.22	0.25	0.853	0.855	0.826	0.826	0.20	0.27	0.06	0.11
	FT	0.22	0.22	0.860	0.863	0.826	0.826	0.22	0.23	0.07	0.08
	Fourier	0.17	0.19	0.871	0.873	0.913	0.870	0.13	0.19	−0.02	0.03
6	Gauss	0.19	0.22	0.851	0.854	0.913	0.913	0.13	0.20	−0.02	0.04
	FT	0.20	0.19	0.856	0.859	0.913	0.913	0.16	0.17	0.00	0.01
	Fourier	0.17	0.17	0.867	0.869	0.957	0.913	0.07	0.19	−0.09	−0.04

[1] $\overline{u}$ logarítmico e K_z de [11]; [2] $\overline{u}$ potência e K_z de [11]; [3] $\overline{u}$ logarítmico e K_z de [12]; [4] $\overline{u}$ potência e K_z de [12]; [5] $\overline{u}$ logarítmico e K_z de [13]; [6] $\overline{u}$ potência e K_z de [13].

4 Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se a resolução da equação de advecção-difusão tridimensional estacionária com fechamento não-local utilizando dois termos para o contragradiente e três métodos de inversão numérica da transformada de Laplace foram analisados. O modelo aqui apresentado simulou satisfatoriamente as concentrações medidas no experimento de Copenhagen, obtendo bons resultados para os dois termos de contragradiente com os três métodos de inversão numérica e as diferentes parametrizações da turbulência.

Do ponto de vista estatístico os métodos numéricos de inversão apresentaram resultados com boa precisão, porém observou-se que o Algoritmo de Fixed-Talbot requer menor custo computacional. Isso deve-se ao fato de que a Quadratura de Gauss utiliza termos exponenciais que aumentam conforme o número de pontos da quadratura e no método baseado na série de Fourier é preciso utilizar muitos termos do somatório para obter a estabilidade numérica desejada.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPERGS pelo suporte financeiro na realização deste trabalho.

Referências

[1] Roland B. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, 1988.

[2] C. P. Costa, M. T. Vilhena, D. M. Moreira, and T. Tirabassi. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, 40:5659–5669, 2006.

[3] J. W. M. Cuijpers and A. A. M. Holtslag. Impact of skewness and nonlocal effects on scalar and buoyancy fluxes in convective boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 55:151–162, 1998.

[4] D. R. Roberti, H. F. Campos Velho, and G. A. Degrazia. Identifing counter-gradient term in atmospheric convective boundary layer. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 12(3):329–339, 2004.

[5] J. Abate and P. Valkó. Multi-precision Laplace transform inversion. *Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993, 2004.

[6] A. H Stroud and D. Secrest. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966.

[7] K. S. Crump. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation. *J. ACM*, 23(1):89–96, 1976.

[8] S. E. Gryning and E. Lyck. *The Copenhagen Tracer Experiments: Reporting of Measurements*. Riso National Laboratory, 2002.

[9] J. W. Deardorff. Theoretical expression for the countergradient vertical heat flux. *Journal of Geophysical Research*, 77:5900–5904, 1972.

[10] Z. Sorbjan. *Structure of the Atmospheric Boundary Layer*. Prentice Hall, 1989.

[11] J. Pleim and J. Chang. A non-local closure model for vertical mixing in the convective boundary layer. *Atmospheric Environment*, 26A(6):965–981, 1992.

[12] G. A. Degrazia, U. Rizza, C. Mangia, and T. Tirabassi. Validation of a new turbulent parameterization for dispersion models in convective conditions. *Boundary-Layer Meteorology*, 85(2):243–254, 1997.

[13] G. A. Degrazia, D. M. Moreira, and M. T. Vilhena. Derivation of an eddy diffusivity depending on source distance for vertically inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer. *Journal of Applied Meteorology*, pages 1233–1240, 2001.

[14] A. H. Panofsky and A. J. Dutton. *Atmospheric Turbulence*. John Wiley & Sons, New York, 1984.

[15] S.R. Hanna. Confidence limits for air quality models, as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. *Atmospheric Environment*, 23:1385–1395, 1989.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0406