Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Otimização irrestrita: um estudo teórico e computacional sobre o método de região de confiança

Tiago Lino Bello[1]
Acadêmico de licenciatura em Matemática, UNESPAR, Campo Mourão, PR
Gislaine Aparecida Periçaro[2]
Colegiado de Matemática, UNESPAR, Campo Mourão, PR
Solange Regina dos Santos[3]
Colegiado de Matemática, UNESPAR, Campo Mourão, PR

1 Resumo

A busca da excelência em produtividade é um dos principais desafios da atualidade e tem ocupado um espaço de destaque em qualquer campo de atividade, principalmente naqueles em que a utilização de técnicas matemáticas são de extrema importância. Por exemplo, engenheiros astronáuticos precisam de uma garantia matemática que seja possível encontrar uma trajetória ótima para um veículo espacial, assim como um trabalhador de uma empresa precisa de uma garantia para que seu estoque esteja sob controle.

Esta busca, conhecida nas ciências exatas como processo de otimização, tem por objetivo tornar mais favoráveis seus resultados, elaborando alternativas estratégicas para uma gestão eficiente. A utilização dos mecanismos matemáticos para a busca desta primazia fornece um grau maior de confiabilidade e facilitam a obtenção de um valor ótimo. Em termos matemáticos, tais mecanismos são empregados com a finalidade de encontrar valores mínimos e/ou máximos vindos de uma função real modelada sobre um certo conjunto de restrições. Formalmente, um problema de otimização pode ser estabelecido como

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega, \end{array} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função arbitrária continuamente diferenciável. A diversidade dos problemas de otimização se dá pelos atributos do próprio problema, dependendo das características do conjunto de restrições, aliada com as propriedades da função objetivo, pois "as funções envolvidas no problema podem ser contínuas ou não, diferenciáveis ou não, lineares ou não" [2]. Neste trabalho, estamos particularmente interessados em problemas cujas funções são não lineares e continuamente diferenciáveis, com $\Omega = \mathbb{R}^n$, denominado problema de programação não linear irrestrita.

[1] tiago.bello1@hotmail.com
[2] gislaine.pericaro@unespar.edu.br
[3] solaregina@gmail.com

Para solucionar um problema de otimização irrestrita é de praxe empregar métodos específicos para sua minimização, entre os quais podemos citar o método de Cauchy, o método de Newton e o método de região de confiança. Dentre os métodos de otimização irrestrita, este trabalho tem como princípio investigar teorica e computacionalmente o método de região de confiança, verificando seu desempenho com determinadas funções.

A essência do método de região de confiança consiste em resolver problemas do tipo (1) com $\Omega = \mathbb{R}^n$, definindo um modelo quadrático da função objetivo e uma região em torno do ponto corrente no qual podemos confiar no modelo. Um minimizador aproximado d_k do modelo na região de confiança é calculado resolvendo o seguinte subproblema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & m_k(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{sujeito a} & \|d\| \leq \Delta_k, \end{array} \tag{2}$$

onde $\|.\|$ representa uma norma qualquer e $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica arbitrária que satisfaça $\|B_k\| \leq \beta$, $\beta > 0$. Se o ponto $x_k + d_k$ fornecer uma redução razoável na função objetivo, então ele é aceito e repete-se o processo. Caso contrário, o passo d_k é recusado, o raio Δ_k da região de confiança é reduzido e o subproblema (2) é resolvido novamente. Esse procedimento é repetido até que um ponto estacionário seja encontrado.

A diferença deste método em relação a outros algoritmos de otimização irrestrita de busca unidirecional reside no fato de que este procedimento nos informa primeiramente o quanto caminhar e depois calcula a direção a fim de reduzir a função objetivo, sendo que a direção do passo pode mudar no momento em que um ponto é recusado e a região de confiança reduzida. Já em métodos como Cauchy e Newton, uma direção é fixada e em seguida determina-se o quanto caminhar nessa direção.

A resolução do subproblema (2) nem sempre será de forma exata, afetando assim a convergência do método. Para garantir sua convergência, considera-se uma direção que forneça uma redução no modelo m_k que seja pelo menos uma fração da redução fornecida pelo passo de Cauchy, definido como o minimizador de m_k ao longo da direção oposta ao gradiente, sujeito a região de confiança. Assim, utilizamos neste trabalho os algoritmos *dogleg* e GC-Steihaug, conforme apresentados em [2], para resolver o subproblema (2), onde ambos fornecem soluções aproximadas tão convenientes quanto o passo de Cauchy.

Concluindo o trabalho, foi gerado uma implementação em MATLAB do método de região de confiança, munido dos algoritmos para resolver o subproblema (2) citado e o método BFGS, utilizado a fim de atualizar a matriz B_k. A implementação e os testes computacionais realizados proporcionaram uma compreensão mais abrangente sobre a filosofia e as limitações que esta técnica promove.

Referências

[1] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization.* Springer Science, New York, 2006.

[2] A. A. Ribeiro, E. W. Karas, *Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais.* Cengage Learning, São Paulo, 2013.

