Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Estudo e Modelagem de Problemas Usando Softwares: Modelo de EDO com Maple.

Marcia Maria C. Cruz[1]
Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, UFRN, Natal, RN

**Resumo**. O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar a importância da utilização de ferramentas computacionais em sala de aula. Será apresentada aqui uma proposta metodológica sobre o emprego de softwares com o fim de tornar aulas de matemática um aprendizado mais dinâmico, mais atraente e mais prazeroso. Muitas tentativas vêm sendo feitas buscando práticas que levem a melhoria do processo ensino/aprendizagem em matemática mas, será que o uso de softwares pode auxiliar o professor na transposição didática de alguns conteúdos matemáticos e dessa forma contribuir para melhoria do ensino em matemática? Propõe-se então uma metodologia que vem sendo desenvolvida e aprimorada ao longo de vários anos de experiências quando começaram a aparecer os primeiros softwares de matemática. Sempre em busca de aperfeiçoar a forma de transmitir os conteúdos de matemática em disciplinas, como Cálculo, Geometria Analítica, Álgebra Linear, entre outras, o uso de softwares tende a ser uma iniciativa que com certeza tem tido sucesso. Foram vários softwares envolvidos nestas experiências, podemos citar: Derive, MatLab, C.a.R, Geogebra, Maxima e Maple. Alguns gratuitos outros não. As experiências estende-se também a participação em eventos científicos com trabalhos nesta direção [3]. Para este trabalho será feito uso do software Maple. A principal proposta é apresentar uma aplicação prática, através de um modelo matemático desenvolvido com a ajuda deste software, cujo objetivo é mostrar uma metodologia para explorar conteúdos matemáticos através de um simples problema que envolve uma importante lei física e cuja solução deve ser realizada por meio da resolução de uma equação Diferencial Ordinária (EDO).

**Palavras-chave**. Softwares, Ensino, Modelo Matemático, Recursos Computacionais, Maple, EDO)

## 1 Introdução

A questão da utilização de recursos computacionais no ensino, ocupa uma posição central que é a importância de refletir as mudanças provocadas por essas tecnologias, propondo novas práticas docentes e buscando proporcionar experiências de aprendizagem significativas para os alunos. O uso de softwares no ensino da matemática é hoje uma prática que vem crescendo cada vez mais nas escolas e em instituições superiores. Esta prática vem possibilitando aos docentes, estratégias pedagógicas que visam uma melhor compreensão

[1]marcia@ccet.ufrn.br

 

dos conceitos matemáticos. A utilização de ferramentas computacionais através de uso de aplicativos educacionais e de softwares no ensino da matemática, se apresenta como uma metodologia moderna, inovadora e dinâmica, desde que sejam utilizadas de modo a favorecer a aprendizagem nos diferentes níveis de ensino para além da memorização dos resultados dessa ciência. Vale observar que a presença das tecnologias, mais especificamente do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas frente ao processo ensino/aprendizagem. Em qualquer área, o computador pode enriquecer o ambiente de aprendizagem fazendo com que o aluno interaja com os objetos desse ambiente, tendo a chance de aperfeiçoar seu conhecimento e amadurecer na construção deste. Neste trabalho pretende-se apresentar uma forma de ensinar matemática fazendo uso de software de forma eficiente, mostrando como é possível tornar uma aula mais atraente, mais dinâmica e mais participativa, bem como explorar ao máximo a matemática que está por trás dos problemas que são apresentados.

## 2 Softwares como ferramentas no Ensino

Um bom software de matemática tem a capacidade de ajudar aluno e professor na visualização de figuras geométricas, gráficos diversos, na modelagem de problemas e interpretações geométricas, além de facilitar em cálculos algumas vezes exaustivos, dessa forma pretende-se aqui, explorar situações que levem o aluno a perceber que pode aprender matemática de forma agradável, gostando e querendo ir mais além. A seguir será apresentada uma sessão sobre o software Maple, bastante conhecido no mundo acadêmico e científico. Será feita inicialmente uma breve descrição sobre o referido software e em seguida será apresentado um problema físico que envolve estudo de EDO. Será mostrado passo-a-passo a resolução do problema, acrescentando discussões sobre os aspectos físicos e matemáticos contidos neste.

### 2.1 MAPLE

**Maple** é um software pertencente a uma classe chamada de computação simbólica ou algébrica, dirigido para a resolução de diversos problemas em Matemática e outras Ciências afins. Uma das principais características do Maple é permitir manipulações numéricas e simbólicas, além de gerar gráficos em dimensão 2 e 3. As manipulações simbólicas são operações do tipo - expressar uma variável em função de outra, substituição, simplificação, fatoração, reagrupamentos dos termos de uma expressão, etc. A capacidade simbólica do software, permite obter soluções exatas em diversos tipos de problemas. O Maple consiste de três partes principais, a saber: o núcleo (kernel), que é a parte central do software, escrita em linguagem C, onde são realizadas as operações; as livrarias (packages), que são um conjunto de funções pré-definidas e que são acionadas por uma sintaxe própria, quando necessário; e finalmente, a interface do usuário, chamada folha de trabalho (worksheet), onde se realizam as operações de entrada e saída. O Maple é uma ferramenta poderosa que serve não somente para testar os conhecimentos de Cálculo, como também abrange muitas áreas da Matemática. [2]

 

## 2.2 Atividade resolução de problema de EDO com Maple

O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias vem tendo algumas transformações ao longo das últimas décadas. A forma tradicional de ensino, enfatizando a resolução das EDOs tem sido articulada com outras estratégias que visam dinâmicas diferentes nos processos de ensino e aprendizagem [2]. De acordo com [5] e [4], estas mudanças podem contribuir para que o ensino das EDOs seja mais significativo para o aluno quando as três abordagens analítica-algébrica, geométrica-gráfica e numérica podem ser trabalhadas com o auxílio de softwares matemáticos. Com o apoio do software Maple, vamos então apresentar um problema que pode ser um provocador no processo da construção de conhecimentos, uma vez que podemos explorar bastante os conteúdos envolvidos.

## 2.3 Problema físico envolvendo termodinâmica

**Lei de Resfriamento de Newton** A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura T(t) de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante Tm do meio ambiente, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{1}$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade.

**Problema:** A velocidade de resfriamento/aquecimento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Supondo que um termômetro é removido de uma sala em que a temperatura é de $70^o$F e colocado do lado de fora, em que a temperatura é de $10^o$F. Após 1/2 minuto, o termômetro marcou $50^o$F. Qual será a temperatura marcada no termômetro no instante $t = 1$ minuto? Quanto tempo levará para o termômetro marcar $15^o$F?
PS. *Problema extraído do texto Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem de Dennis G. Zill, 2003, página 104, problema 13.*

Para a resolução do problema usaremos o software Maple em todos os cálculos necessários.

Para começar, vamos considerar os seguintes itens:

1 **Questionamentos e Modelo Matemático - Lei Física: Identificando as variáveis:**

   a Qual a variável independente do problema? Resposta: tempo(t).

   b Qual a variável dependente do problema? Resposta: temperatura do corpo(T).

   c Qual é o parâmetro do problema? Resposta: $k$.

   d Qual é a constante do problema? Temperatura do ambiente ou do meio? Resposta: $T_m = 10^o$.

   **Modelo Matemático:** Qual a lei matemática que se aplica ao problema? A velocidade de resfriamento é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e

 

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.



do ambiente. Resposta:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{2}$$

**Condição inicial e de contorno**

a Qual a condição inicial do problema? Resposta: para $t = 0 \to T = 70$

b Qual a condição de contorno do problema? Resposta: $t = 1/2 \to T = 50$

2 Modelo e resolução com Maple

**Expresse o que se pede**
Resposta:

- (1) a temperatura marcada no termômetro no instante $t = 1$ min.
- (2) o tempo que levará para o termômetro marcar $15^oF$.

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10) \tag{3}$$

**Modelo no Maple:** Seguir os seguintes passos:

P1 carregar os pacotes *DEtools* e *Plots*;

P2 sintaxe do modelo
$edo := diff(T(t), t) - k(T(t) - 10) = 0$

$$\frac{dT}{dt} - k(T(t) - 10) = 0 \tag{4}$$

P3 O comando *dsolve* produz a solução geral de uma EDO.
***dsolve(edo)***

$$T(t) = 10 + e^{(kt)}C \tag{5}$$

P4 Calcular os valores dos parâmetros $k$ e $C$. Para encontrar a solução particular precisamos determinar os valores de $k$ e $C$.
Cálculo de $C$
De acordo com a condição inicial do problema, tem-se que
***dsolve(edo,T(0)=70,T(t))***

$$T(t) = 10 + 60e^{(kt)} \tag{6}$$

Cálculo de k
$solve(T(t) = 10 - 10^{(kt)}, k)$
Obtemos:

 

$$\frac{\ln(\frac{1}{60}T(t)-\frac{1}{6})}{t} \tag{7}$$

De acordo com a condição de contorno do problema e usando o comando *subs* do Maple, calculamos o valor de $k$, para $t=\frac{1}{2}$ e $T(t)=50$. Obtemos $k=2\ln(\frac{2}{3})$

Assim, a solução particular será:

$$T(t)=10+60e^{(2\ln(\frac{2}{3})(t)} \tag{8}$$

finalmente as respostas do problema seguem nos passos 5 e 6.

P5 Calcular a temperatura do termômetro no instante $t=1$ min.

$$T(1)=10+60e^{(2\ln(\frac{2}{3}))} \tag{9}$$

Avaliando resposta em ponto flutuante. Usando o comando *evalf* do Maple na equação da solução particular, obtemos 36,666...

P6 Calcule o tempo em que o termômetro marcará $15^oF$ .
Para o cálculo usamos o comando *solve* do Maple

$$10+60e^{(2\ln(\frac{2}{3})(t)}=15 \tag{10}$$

$solve(10+60exp(2ln(2/3)*t)=15,t)$

Resposta: $t=-\frac{1}{2}(\frac{\ln(12)}{\ln(\frac{2}{3})})$

Avaliando resposta em ponto flutuante: 30,064...

### 2.4 Análise gráfica do problema

- (1) Construir o campo de direção para a equação diferencial

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m) \tag{11}$$

Considerando os valores de $k$ e $T_m$ calculados, ou seja,

$$\frac{dT}{dt}=2\ln(\frac{2}{3}(T-10) \tag{12}$$

Observe que o campo de direção sugere a aparência ou forma de uma família de curvas de integrais da EDO. Ver figura 1.

- (2) Que tipo de função poderíamos aproximar observando o campo de direções?

Observe os elementos lineares. Uma única curva integral segue seu caminho acompanhando o padrão de fluxo do campo. Resposta: exponencial/logarítmica.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0572  

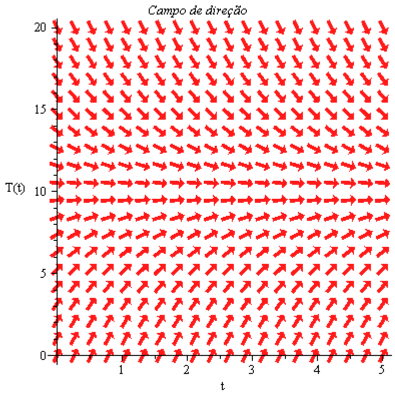


Figura 1: Campo de direções.

- (3) É possível definir o sinal de $\frac{dT}{dt}$ observando o campo de direções? Em caso afirmativo, estabeleça os valores de $T$ para os quais $\frac{dT}{dt} > 0$, $\frac{dT}{dt} = 0$ e $\frac{dT}{dt} < 0$
Observe na figura 1 a inclinação dos elementos lineares. Logo a resposta é sim. Temos então que, $\frac{dT}{dt} > 0$ para $T(t) < 10$, $\frac{dT}{dt} = 0$ para $T(t) = 10$ e $\frac{dT}{dt} < 0$ para $T(t) > 10$

- (4) É possível prever aproximadamente as soluções de equilíbrio da equação?
Soluções de equilíbrio são as únicas soluções constantes da equação diferencial.
Resposta $T \cong 10^o$F

- (5) Plotando Curvas da Solução no Campo de Direções

O comando DEplot desenha o campo de direções associado à equação diferencial em um dado intervalo da variável indepentente e a solução correspondente à condição inicial dada. Para o nosso problema, obtemos a figura 2.

## 3 Conclusões

O uso de novas tecnologias como os softwares podem solucionar problemas encontrados no âmbito educacional desde o ensino fundamental ao superior. De um modo geral os softwares matemáticos podem ser uma boa proposta vivenciada em sala de aula para motivação da aprendizagem e a ruptura da postura passiva do aluno. De acordo com o que foi apresentado aqui, podemos concluir que a principal função dos softwares não resulta na substituição do professor, mas sim auxiliar em uma atividade conjunta que propicia aos alunos interagir com as tecnologias do mundo globalizado. A atividade proposta, teve como principal objetivo mostrar como é possível utilizar um software de forma a fazer com que o aluno possa explorar o máximo possível, conteúdos físicos e matemáticos em um simples problema.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0572  

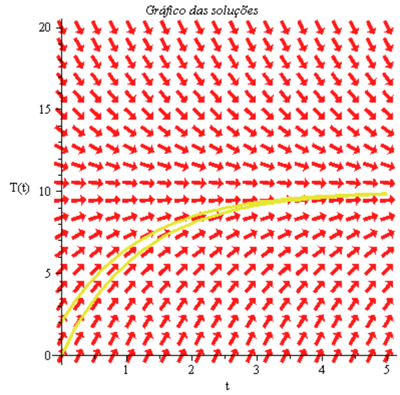


Figura 2: Curva da solução no Campo de direções.

## Referências

[1] J. C. Barbosa, A. D. Caldeira e J. L. Araújo. Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisa prática educacionais. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), p. 17-32, 2007.

[2] A. A. Barros, J. B. laudadres e D. F. Miranda. A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica, *Educ. Matem. Pesq.*, v.16, n.2, p. 323-348, 2014.

[3] M.C. Cruz. Usando o Software Maple como Ferramenta no Ensino da Matemática. Minicurso *In Encontro de Matemática Aplicada e Computacional (I ERMAC)*, Bauru, 2008.

[4] M. M. Dullius. Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con Abordaje Gráfico, Numérico y Analítico. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências (PIDEC) Universidad de Burgos (UBU), 2014.

[5] S. L. Javaroni. Abordagem geométrica: Possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista, 2007.

[6] P. C. M. Teixeira, L. Ribeiro, F. P. Araújo e M. F. Soares. Utilização do Maple na Resolução de um Problema de Consumo de Energia eletrica. *In anais do Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*, Montevideo, Uruguay, 2013.

[7] J. A. Valente. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação. *In Anais do III Encontro Nacional do PROINFO*, Pirenópolis: MEC, 1998.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0572  