Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Cartografia: uma Introdução aos conceitos de Geometria não Euclidiana na Educação Básica

Marlon Mülhbauer[1]
Instituto Federal de Santa Catarina, Canoinhas, SC
Mateus Bernardes[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. Este trabalho tem como objetivo relatar a experiência resultante da introdução de conceitos de Geometrias não Euclidianas a alunos do segundo ano do Ensino Médio. Para esta experiência os alunos foram convidados a participar, voluntariamente, no contra-turno, de atividades que envolviam princípios básicos de Cartografia, História da Matemática, cálculo (coordenadas esféricas) e espaços métricos (norma, produto interno). As atividades foram desenvolvidas pelo autor, segundo cronograma próprio e envolviam aulas expostivas e exploração de material concreto para assimilação e resolução dos problemas propostos.

Palavras-chave. Ensino de matemática, Geometria Esférica, Cartografia.

1 Introdução

Qual a distância entre Nova Iorque e Madri? A resposta a esta pergunta não pode ser dada de maneira satisfatória sem que se responda a uma questão anterior: como se mede esta distância? Para o aluno usual do ensino básico esta última pergunta sequer faz sentido, uma vez que seus conhecimentos de Geometria costumam ater-se à chamada Geometria Euclidiana (ver figura 1).

Com este arsenal, a tendência é medir esta distância usando-se um mapa, uma régua e um fator de conversão de escalas. Entretanto este raciocínio embute um erro de quase 3%, ou um pouco mais de 160 km [9].

Neste trabalho mostramos que através da Cartografia como elemento motivacional, é possível entender conceitos básicos de Geometria Esférica e perceber porque a Geometria Euclidiana clássica não é adequada para se responder perguntas deste tipo com precisão.

2 Matemática e Interdisciplinaridade

Os desafios da docência parecem formar um conjunto em expansão. Do professor espera-se que seja motivador o suficente para propiciar ao aluno o desenvolvimento do

[1]marlon.mulhbauer@ifsc.edu.br
[2]mbernardes@uftpr.edu.br

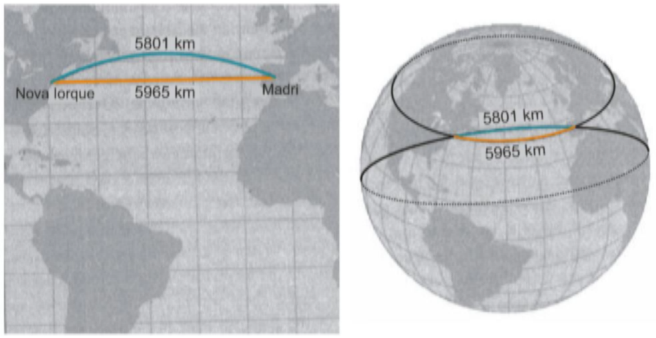

Figura 1: Representação das distâncias entre Nova Iorque e Madri, pelo paralelo e pela geodésica. Fonte: Adaptado de [8].

raciocínio lógico e espírito crítico a respeito do mundo, e ainda treiná-lo para que use sua imaginação e intuição para resolver problemas ao seu redor. Segundo Ávila [1], "A intuição é a faculdade mental que nos permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a interveniência do raciocínio. Os matemáticos frequentemente referem-se a algum fato como 'intuitivo', querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que o 'intuitivo' não é sinônimo de 'fácil'. Há muitas verdades profundas e difíceis que são apreendidas pela intuição".

Com tudo isso, ainda por cima não é raro ouvir-se perguntas do tipo: "Onde vou usar isso na minha vida?". Infelizmente, nem sempre a resposta à esta pergunta satisfaz os anseios de quem a fez. O ensino da Matemática na Educação Básica não costuma se relacionar com outras áreas. Neste trabalho mostramos como tópicos típicos da Geografia podem requerer conhecimentos matemáticos que raramente são abordado nas séries do ensino básico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) estimulam a contextualização e a interdisciplinaridade no ensino de matemática, assim como a abordagem de aspectos da História da Matemática. Recomendam ainda que se use a resolução de problemas para estimular a criatividade e independência dos estudantes [6].

Naquilo que pode ser encarado como rara oportunidade, eis que uma simples pergunta a respeito de distâncias geográficas pode trazer todos estes aspectos à tona. Desde a antiguidade clássica se discutem questões a respeito da forma da Terra e sobre a melhor maneira de representá-la graficamente, e desde o Ga-Sur (primeiro registro cartográfico datado de aproximadamente 2400 a 2200 a.C., na Babilônia) até o *Global Positioning System* (GPS), muito desenvolvimento matemático, científico e tecnológico permeou estas discussões.

2.1 Novas Geometrias

Na formulação equivalente de Playfair(1748-1829), o famoso postulado das paralelas, o quinto postulado de Euclides enuncia-se como: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada (ver figura 2). Este postulado inquietou

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0571

matemáticos através dos séculos [2]. Nomes como Proclus (410-485), Nasiredin (1201-1274), Wallis (1616-1703), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Legendre(1752-1833) e Bertrand (1731-1812) acharam estranho Euclides usar o quinto postulado apenas a partir da 29^a proposição, tendo usado apenas os outros quatro até então.

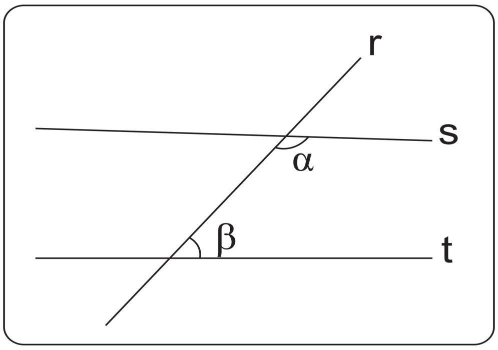

Figura 2: Representação do quinto postulado: Se $\alpha+\beta < 180^o$, então as retas r e s encontrar-se-ão ao prolongá-las para a direita, neste caso.

Desta inquitação é possível observar que muitas vezes questões cuja origem são abstratas podem se inserir no dia a dia indagações de natureza mais concreta e ajudar a atendê-las de maneira mais precisa. A negação deste quinto postulado dá origem à duas possibilidades de Geometrias não Euclidianas: a elíptica (de curvatura positiva) e a hiperbólica (de curvatura negativa) [4,8]. Na figura 3 exibem-se exemplos de superfícies de curvatura positiva (ovo) e negativa (corneta plástica), para as quais, portanto, o modelo de geometria plana de Euclides é inadequado.

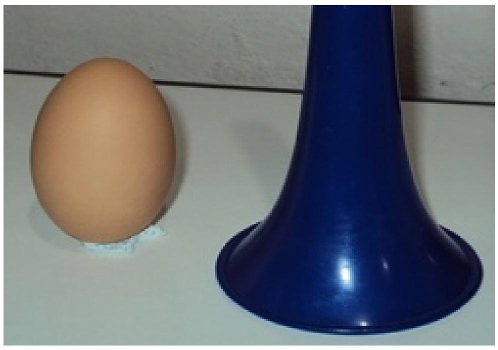

Figura 3: Ovo e corneta plástica: representação de geeometrias não Euclidianas usando material concreto.

Estas novas geometrias são a chave para desvendar mistérios que a antiga geometria clássica não permite. Especificamente quando se trata de distâncias no globo terrestre, o uso da Geometria Esférica (do tipo Elíptica) é fundamental, pois a forma da Terra é aproximadamente esférica. É o *Teorema Egregium de Gauss* que garante que uma esfera não pode ser planificada sem deformar-se [3], daí a impossibilidade de se representar a superfície terrestre em um mapa plano, sem distorcê-la. Mesmo usando qualquer tipo de projeção cartográfica, seja ela cilíndrica, cônica ou azimutal [7, 10]. Também daí vem a justificativa para o erro cometido ao se aproximar por uma linha plana reta aquilo que deveria ser um arco de geodésica.

2.2 Atividades Propostas

A partir do desenvolvimento de princípios teóricos básicos desta Geometria, trabalhou-se em contraturno com alunos voluntários do segundo ano do ensino médio do Colégio Excelência em Mafra, SC, com o intuito de entender as limitações da cartografia à medida que se trabalham estes conceitos de Geometria não Euclidiana, obtendo-se resultados extremamente interessantes a partir de uma série de atividades propostas [9].

Estas atividades apoiaram-se em três listas de exercícios, confeccionadas pelo autor. A primeira atividade dividiu-se entre um diagnóstico do conhecimento dos alunos, contendo perguntas referentes à Geometria Euclidiana e outros conceitos básicos, como escala; e uma parte experimental, que tinha por objetivo estimular a curiosidade dos alunos ao trabalhar com material concreto (bola de isopor, ver figura 4), mostrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo (esférico) é maior de 180^o.

Figura 4: Triângulos esféricos sobre bolas de isopor. Material confeccionado por alunos para a Atividade 1.

Para a segunda atividade, trabalhou-se algumas definições clássicas da geometria (plana) no âmbito esférico. Atividades relacionadas a conceitos da Geografia tais como latitude e longitude também foram propostas, além dos primeiros cálculos envolvendo a medida de distâncias na esfera. O objetivo desta atividade era ter uma leitura correta do significado das coordenadas geográficas sobre a superfície terrestre, compreendendo a diferença entre conceitos primitivos da geometria plana e elíptica.

Já na terceira e última atividade, cálculos relacionados com o produto interno, demonstrado em aulas expositivas que compunham o conjunto de atividades, foram aplicados. Estes conceitos foram sendo aprofundados, necessitando fazer a conversão das coordenadas geográficas de pontos específicos do planeta em coordenadas esféricas e cartesianas. Objetivou-se com essa atividade que os alunos usassem os conceitos vetoriais para calcular a distâncias entre pontos na esfera. O cronograma completo encontra-se na tabela 1.

Tabela 1: Cronograma das atividades realizadas.

Semana	Data	Atividade Realizada
1	12/set	Introdução e objetivos; aplicação da Atividade 1.
2	19/set	Entrega da Atividade 1; comentários.
3	26/set	Revisão de trigonometria.
4	03/out	Conceitos de cartografia.
5	10/out	Aplicação da Atividade 2.
6	17/out	Entrega da Atividade 2; comentários.
7	24/out	Vetores: Conceitos iniciais, operações.
8	31/out	Coordenadas esféricas e cartesianas.
9	07/nov	Demonstração da fórmula do ângulo entre dois vetores.
10	14/nov	Distância entre dois pontos na esfera; exercícios.
11	21/nov	Aplicação da Atividade 3.
12	28/nov	Entrega da Atividade 3; comentários e considerações finais.

Para exemplificar o tipo de atividade incluído nesta última etapa, exibe-se a seguir o cálculo da distância entre Buenos Aires e Berlim, de coordenadas geográficas $34^o36'47''$S, $58^o22'38''$O; e $52^o31'27''$ N, $13^o24'37''$ L, respectivamente.

Convertendo-se os ângulos para a forma decimal, supondo o raio da Terra 6371km e analisando seu sinal, temos as coordenadas esféricas de:

- Buenos Aires: $(\rho; \alpha; \theta) = (6371; -58{,}376^o; -34{,}613^o)$;
- Berlim: $(\rho; \alpha; \theta) = (6371; 52{,}523^o; 13{,}41^o)$.

Onde ρ, α, e θ representam as coordenadas esféricas de um ponto sobre a superfície terrestre. A partir daí, obtém-se as coordenadas cartesianas dessas cidades, sendo:

- Buenos Aires: $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1) = (2749{,}32; -4464{,}77; -3618{,}92)$;
- Berlim: $\vec{v} = (x_1; y_1; z_1) = (3770{,}7; 899{,}0; 5056{,}01)$.

Em seguida, calcula-se o produto interno [5] entre os dois vetores:

$$< \vec{u}; \vec{v} >= x_1x_2 + y_1y_2 + x_3y_3 = -11944263{,}02. \tag{1}$$

Assim, sendo β o arco em graus que une as duas cidades, tem-se:

$$\beta = \arccos\left(\frac{-11944263{,}02}{63712^2}\right) = -0{,}294268752 = 107{,}11369^o. \tag{2}$$

Donde o comprimento do arco será de 11910,5 km o que representa uma variação de 0,012% em relação a distância referida como correta, 11911,96 km. Este erro pode ser discutido mais em termos das imprecisões geográficas do que se forem atribuídos a erros numéricos, pois vale lembrar ainda que a Terra não é perfeitamente esférica, apresentando variação de seu raio de 6357 km (raio polar) a 6378 km (raio equatorial).

3 Conclusões

O convívio destes estudantes com conceitos básicos de Geometria não Euclidiana lhes propiciou perceber a importância do desenvolvimento histórico da Matemática não apenas como um fim em si mesmo, mas também com a possibilidade de ser aplicada em outras áreas. O uso de material concreto como bolas de isopor, barbantes, entre outros; assim como o contato com conceitos teóricos tais como coordenadas esféricas, norma, produto interno (em $\mathbb{R}^3$) não se limitou a uma exposição de novos temas apenas como curiosidade mas, principalmente, como uma necessidade premente para a resolução dos problemas propostos.

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao PROFMAT e à CAPES por ter propiciado a possibilidade de enxergar a Matemática dentro de um contexto mais amplo e interessante.

Referências

[1] G. Ávila. Objetivos do ensino da matemática, *Revista do Professor de Matemática*, 27, 1:1-7, 2010.

[2] C. B. Boyer. *História da Matemática*. EdUSP, São Paulo, 1974.

[3] M. P. Do Carmo. *Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[4] E. Kasner e J. Newman. *Matemática e Imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos*. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1968.

[5] E. L. Lima, *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[6] Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 03 de janeiro de 2014.

[7] E. F. Menezes. *Projeções Cartográficas*. FTD, Rio de Janeiro, 2004.

[8] L. Mlodinov. *A Janela de Euclides: a História da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço*. Geração, São Paulo, 2010.

[9] M. Mülhbauer. Cartografia: uma Introdução aos conceitos de Geometria não Euclidiana na Educação Básica. Dissertação de Mestrado, Curitiba, 2014.

[10] C. de Oliveira, *Curso de Cartografia Moderna*. IBGE, Rio de Janeiro, 1988.

