Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolução de Problemas de Programação Quadrática e Cônica como Aplicação de Conteúdos na Disciplina de Álgebra Linear

Rogério dos Reis Gonçalves[1]
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brasil
Vera Lúcia Vieira de Camargo[2]
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brasil
André do Amaral Penteado Bíscaro[3]
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

Resumo. Este trabalho visa apresentar uma proposta de abordagem para o ensino da Álgebra Linear (AL) por meio da resolução de problemas como aplicação de conteúdos, ou seja, ensinar determinados conceitos matemáticos para se resolver problemas. Será proposta a resolução de um problema de programação quadrática com restrições quadráticas (PQRQ) para que sejam determinados os modelos equivalentes na sua forma matricial e posteriormente associados com a respectiva notação de norma. Conceitos de norma, operações com matrizes, matriz semidefinida positiva, determinantes, autovalores, autovetores, cálculo da matriz inversa e diagonalização são utilizados para a resolução do problema equivalente determinado. Além disso, do problema equivalente na forma matricial com notação de norma é possível encontrar também o seu equivalente de programação cônica de segunda ordem (PCSO). Para resolvê-los, optamos em utilizar a linguagem de modelagem matemática AMPL [3], com o uso dos solvers comerciais CPLEX [5] e KNITRO [1]. Esta escolha é importante, pois contribuirá nas diversas discussões que apresentamos no decorrer deste trabalho. Esta proposição se justifica, à medida que julgamos fundamental no processo de ensino e aprendizagem que os alunos da graduação vivenciem situações-problema com diferentes métodos de resolução aliado ao uso de recursos computacionais apropriados.

Palavras-chave. Ensino, Resolução de problemas, Álgebra linear, Programação quadrática, Programação cônica, Linguagem de Modelagem Matemática AMPL.

1 Introdução

A disciplina de AL está presente na maioria dos currículos dos cursos superiores nas ciências exatas, tendo em vista a vasta quantidade de aplicações de seus conceitos em outras áreas do conhecimento. Diante da importância dessa disciplina encontramos na

[1]rogerio@unemat-net.br
[2]vera@unemat-net.br
[3]aapbiscaro@unemat-net.br

literatura alguns trabalhos desenvolvidos tratando dos aspectos que envolvem o ensino e aprendizagem da AL, dentre eles, destacamos o trabalho de [4] que investigou em que medida um tratamento geométrico e a articulação entre registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico), auxiliado pelo ambiente Cabri-Géomètre, influenciam nas concepções de estudantes e de [2] que pesquisou sobre as contribuições dos vídeos digitais e da metodologia de aula reversa para a conceitualização em AL. Segundo [2] há também outras pesquisas nesta área, dentre elas, o estudo sobre as concepções de estudantes sobre a AL, levantamento de registros do ensino e aprendizagem na década de 90, compreensão de alunos acerca de determinados temas desta área e registros de representação em livros didáticos. Pelo apresentado, não há trabalhos desenvolvidos visando verificar as contribuições para o ensino e aprendizagem desta disciplina ao se utilizar os conceitos da AL em sala de aula para se resolver problemas de otimização. Com o intuito de contribuir com o ensino e aprendizagem desta área é que propomos uma atividade de ensino a ser desenvolvida a partir de problemas de otimização matemática junto com o uso de recursos computacionais.

2 Problema Modelo de Programação Quadrática com Restrições Quadráticas

Definição 2.1. *Um problema de otimização é chamado de programação quadrática (PQ) se a função objetivo é quadrática e as restrições são funções afins. A PQ pode ser expressa na forma*

$$\min X^T P X + 2q^T X + r \tag{1}$$

$$s.a.$$

$$GX \leq h \tag{2}$$

$$AX = b, \tag{3}$$

onde $P \in S_+^n$, $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *e* $X \in \mathbb{R}^n$.

Após apresentar a definição de um problema de PQ, o professor deve solicitar aos alunos que verifiquem se os produtos de matrizes estão bem definidos na função objetivo (1) e nas restrições (2) e (3). Além disso, os alunos deverão exibir exemplos de um problema de PQ a fim de familiarizar-se com a notação utilizada. Nessa etapa, é importante verificar se em cada problema a matriz P é semidefinida positiva e discutir sua relevância na PQ.

Definição 2.2. *Um problema de otimização é chamado de PQRQ se for um problema de PQ e as restrições de desigualdades são quadráticas. A programação quadrática com restrições quadráticas pode ser expressa na forma*

$$\min X^T P_0 X + 2q_0^T X + r_0 \tag{4}$$

$$s.a.$$

$$X^T P_i X + 2q_i^T X + r_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{5}$$

$$AX = b, \tag{6}$$

onde $P_i \in S^n_+, \; i = 0, 1, \ldots, m.$

Uma análise análoga ao problema de PQ deve ser feita com o problema de PQRQ. Para trabalhar em sala de aula, propomos o seguinte problema de PQRQ definido nas equações (7)-(9).

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 + 15 \tag{7}$$
s.a.
$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36 \tag{8}$$
$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0 \tag{9}$$

O próximo passo que o professor deverá propor aos alunos é o reconhecimento de que o problema (7)-(9) é de PQRQ. Dessa forma, após discussões sobre o modelo acima, os alunos deverão encontrar elementos P_0, q_0, r_0, P_1, q_1 e r_1 e escrever o modelo acima conforme mostrado nas equações (10)-(13).

$$\min X^T P_0 X + 2q_0^T X + r_0 \tag{10}$$
s.a.
$$X^T P_1 X + 2q_1^T X + r_1 \leq 0 \tag{11}$$
$$P_0, P_1 \in S^n_+ \tag{12}$$
$$X \geq 0 \tag{13}$$

A saber, $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $q_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_0 = 15$, $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_1 = -36$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Utilizando a norma euclidiana usual, o problema (10)-(13) pode ser reescrito por meio das equações (14)-(16).

$$\min ||P_0^{1/2} X + P_0^{-1/2} q_0||^2 + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0 \tag{14}$$
s.a.
$$||P_1^{1/2} X + P_1^{-1/2} q_1||^2 + r_1 - q_1^T P_1^{-1} q_1 \leq 0 \tag{15}$$
$$X \geq 0 \tag{16}$$

A transposição do problema (10)-(13) para o problema (14)-(16) é relativamente difícil. Desse modo, o professor deve apresentar este e pedir para que os alunos verifiquem sua equivalência com aquele. No entanto, é necessário primeiramente que os alunos determinem $P_0^{1/2}$, $P_0^{-1/2}$, P_0^{-1}, $P_1^{1/2}$, $P_1^{-1/2}$ e P_1^{-1}, conforme apresentado nas seções 2.1 e 2.2.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0565

2.1 Cálculo de $P_0^{1/2}$, $P_0^{-1/2}$ e P_0^{-1}

A notação $P_0^{1/2}$ representa a raiz quadrada de P_0.

Definição 2.3. *Uma matriz B com entradas reais é denominada raiz quadrada real de uma matriz A se $B^2 = A$.*

Sabe-se que se uma matriz de ordem n é diagonalizável e todos os seus autovalores são não-negativos, então ela possui uma raiz quadrada. Assim, fica evidente que P_0 admite raiz quadrada, visto que P_0 é simétrica e, portanto, diagonalizável e seus autovalores são não-negativos, pois $P_0 \in S_+^n$. Como P_0 é diagonalizável, existe uma matriz diagonal D, cujas entradas na diagonal são os autovalores de P_0 (neste caso, os autovalores são não-negativos), e uma matriz M cujos vetores coluna (autovetores) formam uma base para P_0, tais que $P_0 = MDM^{-1}$.

Os conceitos apresentados no parágrafo anterior devem ser relembrados em sala de aula com os alunos. A partir daí, o professor deve propor que mostrem porque $M\sqrt{D}M^{-1}$ é raiz quadrada de A. Eles devem notar que $\left(M\sqrt{D}M^{-1}\right)^2 = \left(M\sqrt{D}M^{-1}\right)\left(M\sqrt{D}M^{-1}\right) = MDM^{-1} = A$.

Após constatar que P_0 possui raiz quadrada, os alunos devem calcular seus autovalores, isto é, determinar as raízes do polinômio característico $p\,(\lambda) = \det(P_0 - \lambda I_2)$, em que I_2 denota a matriz identidade de ordem 2.

De $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, segue que $P_0 - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$. Assim, tem-se $p\,(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1$. Logo, $p\,(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 3$. Desse modo, os autovalores de P_0 são 1 e 3 e, portanto, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

O próximo passo é determinar uma base para P_0.

Para $\lambda = 1$ temos, $P_0X = \lambda X$ se, e somente se, $(P_0 - \lambda I_2)X = 0$ se, e somente se, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se, e somente se, $x_1 = x_2$. Assim, $(1,1)$ é um autovetor de P_0.

Para $\lambda = 3$, temos, $P_0X = \lambda X$ se, e somente se, $(P_0 - \lambda I_2)X = 0$ se, e somente se, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se, e somente se, $x_1 = -x_2$. Assim, $(1,-1)$ é um autovetor de P_0.

Portanto, $\{(1,1),(1,-1)\}$ representa uma base para P_0 formada por autovetores. Logo, M pode ser dada por $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e, consequentemente, sua inversa é $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Como $P_0^{1/2} = M\sqrt{D}M^{-1}$, segue que $P_0^{1/2} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ e, portanto, as inversas de $P_0^{1/2}$ e P_0 são dadas por:

$$P_0^{-1/2} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_0^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

2.2 Cálculo de $P_1^{1/2}$, $P_1^{-1/2}$ e P_1^{-1}

Note que $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal definida positiva, logo $P_1^{1/2}$ está bem definida e claramente, tem-se

$$P_1^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P_1^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ e } P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

O cálculo das matrizes $P_0^{1/2}$, $P_0^{-1/2}$, P_0^{-1}, $P_1^{1/2}$, $P_1^{-1/2}$ e P_1^{-1} é muito importante, pois contempla aplicações de vários temas estudados na disciplina de AL.

3 Problema Equivalente de Programação Cônica de Segunda Ordem

Definição 3.1. *Um problema de otimização é chamado de programação cônica de segunda ordem (PCSO) se ele pode ser expresso na forma*

$$\min c^T X \tag{17}$$

$$s.a.$$

$$||A_i X + b_i|| \leq c_i^T X + d_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{18}$$

$$AX = b, \tag{19}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ *e* $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

A representação do problema proposto de PQRQ por meio das equações (14)-(16) é interessante, pois a partir dele, obtém-se o equivalente problema de PCSO representado pelas equações (20)-(23).

$$\min t \tag{20}$$

$$\text{s.a.}$$

$$||P_0^{1/2} X + P_0^{-1/2} q_0|| \leq t \tag{21}$$

$$||P_1^{1/2} X + P_1^{-1/2} q_1|| \leq \left(q_1^T P_1^{-1} q_1 - r_1\right)^{1/2} \tag{22}$$

$$X \geq 0 \tag{23}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0565

Vale ressaltar que para obter o modelo cônico, foi necessário adicionar a variável t. Esta estratégia transforma o problema bidimensional de PQRQ em um equivalente cônico tridimensional. Conforme definição 3.1, tem-se que (20)-(23) é um problema de PCSO. O professor deve propor aos alunos para que determinem no último modelo os parâmetros c, A_i, b_i e A, apresentados na definição 3.1.

O valor ótimo do problema de PQRQ é dado por $p^{*2} + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$, em que p^* é o valor ótimo do problema de PCSO. Isto pode ser verificado facilmente comparando os modelos (14)-(16) e (20)-(23).

O próximo passo proposto aos alunos é a representação, na forma explícita, do modelo (20)-(23). Os alunos deverão encontrar o modelo representado pelas equações (24)-(27).

$$\min t \tag{24}$$

s.a.

$$\sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 + 6} \leq t \tag{25}$$

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36 \tag{26}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \tag{27}$$

Muitas análises interessantes podem ser feitas a partir do modelo acima, e algumas serão discutidas na Seção 4.

4 Resultados e Discussões

Neste trabalho os modelos propostos foram implementados na linguagem de modelagem matemática AMPL [3] e resolvidos usando os solvers comerciais CPLEX [5] e KNITRO [1]. É importante ressaltar que o primeiro solver foi desenvolvido para resolver problemas de programação linear, enquanto o segundo, problemas de programação não linear.

Vimos que os modelos matemáticos (14)-(16) e (20)-(23) são equivalentes aos modelos (7)-(9) e (24)-(27), respectivamente. Visto que a implementação no AMPL é próxima da linguagem matemática usual, foram implementados estes dois últimos a fim de obter os resultados.

A solução do problema (7)-(9) é dada por $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ e, portanto, o valor da função objetivo é igual a 15. Ambos os solvers encontraram esta solução. Note que o problema proposto é um problema de programação não linear, pois a função objetivo (7) e/ou a restrição (8) são não lineares. No entanto, são quadráticas e estão associadas a matrizes hessianas semidefinidas positivas. O CPLEX também resolve este tipo de problema.

Em se tratando do problema (24)-(27), o CPLEX acusou restrição não linear não quadrática, devido à restrição (25) e essa é uma condição suficiente para não resolubilidade do modelo. Por outro lado, este foi resolvido com o uso do KNITRO e a solução encontrada foi igual ao do seu equivalente de PQRQ (a menos de erros de aproximações). Neste caso, o valor da função objetivo está em função da nova variável t adicionada no problema original. O valor encontrado para essa variável foi igual a $2,44949$. Após determinar este valor, o professor deverá propor ao aluno a encontrar o valor da função objetivo. O aluno deverá perceber que para isso, basta verificar o "papel"da expressão ${p^*}^2 + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$.

Outra discussão muito interessante em sala de aula é propor aos alunos se é possível utilizar o CPLEX para resolver o modelo de PCSO. O aparecimento da raiz quadrada na Equação (25) é determinante para limitar seu uso, mas o que acontece se elevarmos ao quadrado tal equação? Claramente teremos uma restrição quadrática não linear. Nesse momento, gera-se uma falsa expectativa de que com estes ajustes o problema seja contornado, o que não ocorrerá, visto que a hessiana associada possui autovalor negativo e, portanto, não é semidefinida positiva. Essa discussão também é essencial para que o aluno tenha uma maior compreensão sobre a hessiana e perceba sua importância.

5 Conclusões

O estudo de problemas de PQRQ é muito importante, pois nele o aluno vivencia situações em que, para se resolver este tipo de problema, é necessário lançar mão de vários conceitos da disciplina de AL, tais como, norma de um vetor, multiplicação e cálculo da inversa de matrizes, determinantes, autovalores, autovetores, matriz simétrica, matriz definida positiva (e não negativa), diagonalização, dentre outros. Acreditamos que este tipo de atividade pode se revelar bastante promissora para favorecer a aprendizagem dos alunos e desenvolver atitudes favoráveis frente a Matemática ao perceber as possíveis conexões entre diferentes ramos da matemática e outras áreas do conhecimento.

Outras discussões a partir dessa proposta podem ser adicionadas pelo professor. Este trabalho foi escrito para auxiliá-los na disciplina de AL e, assim, espera-se que a aprendizagem e o ensino ocorram de modo interativos.

Referências

[1] R. H. Byrd, J. Nocedal and R. A. Waltz, KNITRO: an integrad package for nonlinear optimization. *Large-Scale Nonlinear Optimization*. New York: Springer, Nonconvex Optimization and its Applications, volume 83, chapter 8, pages 35-59, 2006.

[2] V. C. Cardoso, Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: Uma Discussão Acerca de Aulas Tradicionais, Reversas e de Vídeos Digitais, Tese de Doutorado, Unicamp, 2014.

[3] R. Fourer, D. M. Gay and B. W. Kernighan. *A modeling language for mathematical programmin*. Pacific Grove: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.

[4] M. V. D. França, Conceitos Fundamentais de Álgebra Linear: Uma Abordagem Integrando Geometria Dinâmica, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

[5] ILOG. CPLEX Optimization subroutine library guide and reference, version 11.0. Incline Village: ILOG, 2008.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0565