

Aspectos teóricos da modelagem de fluxos contínuos em meios porosos 1D

César G. Almeida,¹ Alessandro A. Santana² e Santos A. Enriquez-Remigio³
Núcleo de Matemática Aplicada, FAMAT-UFU, Uberlândia, MG

Resumo. Neste trabalho, nós apresentaremos técnicas de aproximações numéricas do sistema de equações que governam o escoamento miscível incompressível, em meios porosos heterogêneos. As aproximações da equação elíptica e da equação de convecção-difusão serão obtidas através do método dos elementos finitos mistos e híbridos, utilizando espaços de Raviart-Thomas de mais baixa ordem. O estudo será realizado para o caso unidimensional. Porém, os métodos desenvolvidos podem ser aplicados, sem grandes alterações, em problemas que envolvam duas ou mais dimensões. Esse tipo de técnica de aproximação é bastante empregada para a obtenção da velocidade de Darcy e da pressão em meios porosos heterogêneos. Nesse caso, a solução do sistema de equações possui baixa regularidade. Isso ocorre, por exemplo, por conta da descontinuidade da permeabilidade, que é o parâmetro que caracteriza a incerteza inerente à formação geológica caótica do meio. As formulações fracas da equação de convecção-difusão e da equação da velocidade de fluxo de concentração darão origem a um problema de valor inicial (PVI), que dependerá da velocidade de Darcy. Tal PVI será representado por uma equação diferencial ordinária na variável que fornece os valores de concentração, em um dado intervalo de tempo, $[t_{inicial}, t_{final}]$. O PVI será resolvido por uma adaptação no método de Adams-Moulton de ordem 2. A velocidade de Darcy será calculada no tempo $t_{inicial}$. Nos demais instantes de tempo, pertencentes ao intervalo dado, os valores da velocidade serão obtidos por extrapolação linear.

Palavras-chave. Escoamentos miscíveis, elementos finitos mistos e híbridos, convecção-difusão, meios porosos.

1 Introdução

Neste trabalho, nós consideraremos elementos finitos mistos e híbridos e espaços de Raviart-Thomas de mais baixa ordem [1–3] para aproximarmos a equação elíptica e a equação de convecção-difusão. Tais equações correspondem ao modelo de escoamento miscível incompressível da mistura de óleo e solvente, com concentração c , em um meio livre de efeitos gravitacionais. O sistema de equações governantes, no caso unidimensional, é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = q, \quad u = \frac{-\mathcal{K}}{\mu(c)} p_x, \quad \text{e} \quad \varphi \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \{[\varphi d_m + |u| d_\ell] c_x - u c\} = \tilde{c} q, \quad (1)$$

¹cesargui@ufu.br

²alessandro@famat.ufu.br

³santos@famat.ufu.br

onde u é a velocidade de Darcy; $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ é a permeabilidade absoluta da rocha, $x \in \Omega = [x_{min}, x_{max}]$; $\mu = \mu(c)$ é a viscosidade do fluido, que depende da concentração do solvente, $c = c(x, t)$, $t \in J = [0, T]$, $T > 0$; c_x é a derivada parcial da concentração em relação a x ; $p = p(x)$ é a pressão da mistura e p_x é a sua derivada parcial; a porosidade do meio é φ , que será considerada constante e positiva; $q = q(x, t)$ é um termo de fonte, ou sumidouro, representando uma razão volumétrica de fluxo nos poços de injeção e produção; \tilde{c} é a concentração especificada no poço de injeção ou residente no poço de produção; $d_\ell > 0$ é o coeficiente de dispersão longitudinal e $d_m > 0$ é o coeficiente de difusão molecular. $D(u) = \varphi d_m + |u| d_\ell$ é o termo de difusão-dispersão. As condições de fronteira são:

$$u(x_{min}) = 0, \quad p(x_{max}) = 0, \quad \text{e} \quad (-D(u)c_x)(x_{min}) = (-D(u)c_x)(x_{max}) = 0, \quad (2)$$

A condição inicial é dada por $c(x, 0) = c_0(x)$, $\forall x \in \Omega$. O domínio será particionado em n subdomínios como mostrado na Fig. 1,

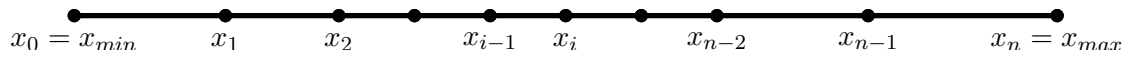


Figura 1: Elementos $E = E_i$ da partição do domínio Ω .

onde $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$; $\overline{\Omega}_i = [x_{i-1}, x_i] = E_i$ e $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Cada problema local de aproximação em $E = [x_{inf}, x_{sup}]$, um elemento qualquer da decomposição de Ω em subdomínios, possuirá 5 incógnitas: 2 multiplicadores ($\ell_{E,L}$ e $\ell_{E,R}$), 2 componentes de fluxo ($V_{E,L}$ e $V_{E,R}$) e 1 valor constante de pressão (p_E) ou de concentração (c_E), e levará em consideração as seguintes observações:

- $h_E = x_{sup} - x_{inf}$; $\bar{x}_E = (x_{inf} + x_{sup})/2$. Valores de pressão, concentração e termo fonte serão considerados constantes por elemento e serão denotados, respectivamente, por: p_E , c_E e q_E . Além disso, $W_{E,L}(x) = (x - x_{sup})h_E^{-1}$, $W_{E,R}(x) = (x - x_{inf})h_E^{-1}$ e $Q_E = h_E q_E$;
- Na fronteira de E , ∂E , a pressão e a concentração serão constantes e denotaremos seus valores por

$$p(x_{inf}) = \ell_{E,L}^{(p)}, \quad p(x_{sup}) = \ell_{E,R}^{(p)}, \quad c(x_{inf}) = \ell_{E,L}^{(c)}, \quad \text{e} \quad c(x_{sup}) = \ell_{E,R}^{(c)},$$

onde os subscritos L e R fazem menção aos valores de pressão e concentração nas fronteiras esquerda e direita, respectivamente. Esses valores são conhecidos como multiplicadores de Lagrange.

- O coeficiente $a = \mathcal{K}(x)\mu^{-1}(c)$ será constante por elemento, sendo denotado por a_E .
- Porosidade, coeficiente de difusão molecular e coeficiente de dispersão longitudinal serão constantes por elemento e seus valores serão denotados, respectivamente, por: φ_E , $d_{m,E}$ e $d_{\ell,E}$. Além disso, a velocidade, V_E , no elemento E , de fluxo de pressão, ou de concentração, será aproximada por $V_E(x) = V_{E,L} W_{E,L}(x) + V_{E,R} W_{E,R}(x)$, onde $V_{E,L}$ e $V_{E,R}$ são escalares (a serem determinados) da combinação linear das funções linearmente independentes $W_{E,L}(x)$ e $W_{E,R}(x)$.

Note que $W_{E,L}(x_{inf}) = -1$ e $W_{E,L}(x_{sup}) = 0$; $W_{E,R}(x_{inf}) = 0$ e $W_{E,R}(x_{sup}) = 1$; $W_{E,L}(\bar{x}_E) = -0.5$ e $W_{E,R}(\bar{x}_E) = 0.5$; $W'_{E,L}(x) = W'_{E,R}(x) = h_E^{-1}$. Além disso, se $x = x_{inf} + h_E X$, então $W_{E,L}(x) = (X - 1)$ e $W_{E,R}(x) = X$. Seja $g(x) = p(x)$ ou $g(x) = c(x)$. Assim, usando integração por partes, temos que

$$\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} g'(x) W(x) dx = [g(x) W(x)]_{x_{inf}}^{x_{sup}} - \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} g(x) W'(x) dx.$$

Na formulação fraca do sistema de equações governantes (1), com condições de fronteira (2) dadas anteriormente, os seguintes resultados serão importantes:

$$(I) \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} (W_{E,L}(x))^2 dx = h_E \int_0^1 (X - 1)^2 dX = h_E \left[\frac{(X - 1)^3}{3} \right]_0^1 = h_E \frac{1}{3}.$$

$$(II) \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} (W_{E,R}(x))^2 dx = h_E \int_0^1 X^2 dX = h_E \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^1 = h_E \frac{1}{3}.$$

$$(III) \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} W_{E,R}(x) W_{E,L}(x) dx = h_E \int_0^1 X(X - 1) dX = h_E \left[\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} \right]_0^1 = -h_E \frac{1}{6}.$$

$$(IV) - \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} g'(x) W_{E,L}(x) dx = g_E - \ell_{E,L}^{(g)} \quad \text{e} \quad - \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} g'(x) W_{E,R}(x) dx = g_E - \ell_{E,R}^{(g)}.$$

2 Aproximação da Equação Elíptica

Seja $E = [x_{inf}, x_{sup}]$ um elemento qualquer da partição do domínio Ω . Como a velocidade de Darcy é dada por $u = -\mathcal{K}(x)\mu^{-1}(c)p_x$, então a formulação fraca de u é dada por

$$\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} [u_{E,L} W_{E,L}(x) + u_{E,R} W_{E,R}(x)] W(x) dx = - \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} \mathcal{K}(x)\mu^{-1}(c(x)) p_x W(x) dx,$$

onde W será dado por $W_{E,L}$ ou $W_{E,R}$. Consultando o final da seção 1, obtemos um sistema nas incógnitas $u_{E,R}$ e $u_{E,L}$. Assim,

$$\begin{bmatrix} u_{E,R} \\ u_{E,L} \end{bmatrix} = a_E p_E A_E^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - a_E A_E^{-1} \begin{bmatrix} \ell_{E,R} \\ \ell_{E,L} \end{bmatrix},$$

onde

$$A_E = h_E \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_E^{-1} = \hat{A}_E = \frac{1}{h_E} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Seja $s_{E,\beta}$, $\beta \in \{R, L\}$, a soma dos elementos da linha (ou coluna) β da matriz \hat{A}_E . Logo, $s_{E,\beta} = \sum_{\alpha} \hat{A}_{E,\beta\alpha} = 6 h_E^{-1}$. Assim,

$$u_{E,\beta} = a_E p_E s_{E,\beta} - a_E \sum_{\alpha} \hat{A}_{E,\beta\alpha} \ell_{E,\alpha}, \quad \forall \beta \in \{R, L\}. \quad (3)$$

Além disso, se $S_E = \sum_{\beta} s_{E,\beta} = 12 h_E^{-1}$, então $s_{E,\beta}/S_E = 0.5$.

Definição 2.1. *Dados um elemento E da partição do domínio e uma extremidade β desse elemento, denotaremos por \tilde{E} o elemento vizinho a E com relação à extremidade β . Além disso, no elemento \tilde{E} , a extremidade equivalente à extremidade β , em E , será denotada por β' . Assim, se $\beta = R$, então $\beta' = L$; se $\beta = L$, então $\beta' = R$. O comprimento do intervalo \tilde{E} será denotado por $h_{\tilde{E}}$.*

Da definição anterior, considerando-se, por exemplo, $E = [x_{i-1}, x_i]$ e $\beta = L$, então $\tilde{E} = [x_{i-2}, x_{i-1}]$ e $\beta' = R$. Se $\beta = R$, então $\tilde{E} = [x_i, x_{i+1}]$ e $\beta' = L$. Dessa forma, podemos concluir que a matriz $\hat{A}_{\tilde{E}}$ tem a mesma estrutura da matriz \hat{A}_E , bastando trocar h_E por $h_{\tilde{E}}$. Assim, de acordo com a equação (3), podemos escrever

$$u_{\tilde{E},\beta'} = a_{\tilde{E}} p_{\tilde{E}} s_{\tilde{E},\beta'} - a_{\tilde{E}} \sum_{\alpha} \hat{A}_{\tilde{E},\beta'\alpha} \ell_{\tilde{E},\alpha}, \quad \forall \beta \in \{R, L\}.$$

Definição 2.2. *Seja x_{β} uma das extremidades do elemento E (se $\beta = L$, então x_{β} é o extremo inferior de E ; x_{β} será o extremo superior, se $\beta = R$). Dizemos que o fluxo relacionado à velocidade de Darcy é contínuo em x_{β} , se $u_E(x_{\beta}) = u_{\tilde{E}}(x_{\beta'})$.*

Lembrando-se de que $u_E(x_{\beta}) = u_{E,L} W_{E,L}(x_{\beta}) + u_{E,R} W_{E,R}(x_{\beta})$ e utilizando as observações feitas no final da seção 1, a relação de continuidade de fluxo é dada por

$$u_{E,\beta} + u_{\tilde{E},\beta'} = 0 \Leftrightarrow a_E p_E s_{E,\beta} - a_E \sum_{\alpha} \hat{A}_{E,\beta\alpha} \ell_{E,\alpha} + a_{\tilde{E}} p_{\tilde{E}} s_{\tilde{E},\beta'} - a_{\tilde{E}} \sum_{\alpha} \hat{A}_{\tilde{E},\beta'\alpha} \ell_{\tilde{E},\alpha} = 0,$$

que é equivalente a

$$a_E p_E s_{E,\beta} + a_{\tilde{E}} p_{\tilde{E}} s_{\tilde{E},\beta'} = a_E \sum_{\alpha} \hat{A}_{E,\beta\alpha} \ell_{E,\alpha} + a_{\tilde{E}} \sum_{\alpha} \hat{A}_{\tilde{E},\beta'\alpha} \ell_{\tilde{E},\alpha}.$$

Seja $W(x)$ uma função constante não nula. A formulação fraca da equação elíptica, no elemento E , é dada por

$$\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} \frac{\partial u}{\partial x} W(x) dx = \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} q W(x) dx,$$

ou seja, $(u_{E,L} + u_{E,R})h_E^{-1} = q_E \Leftrightarrow u_{E,L} + u_{E,R} = h_E q_E = Q_E \Leftrightarrow \sum_{\beta} u_{E,\beta} = Q_E$.

Utilizando as expressões das componentes ortogonais do fluxo (Eq. 3), obtemos a seguinte formulação fraca da equação elíptica:

$$a_E p_E S_E - a_E \sum_{\alpha} s_{E,\alpha} \ell_{E,\alpha} = Q_E. \tag{4}$$

Para eliminar p_E do sistema global, reescrevemos a equação 4 como segue:

$$a_E p_E = \frac{Q_E}{S_E} + a_E \sum_{\alpha} \frac{s_{E,\alpha}}{S_E} \ell_{E,\alpha} \Leftrightarrow a_E p_E s_{E,\beta} = \frac{Q_E}{S_E} s_{E,\beta} + a_E \sum_{\alpha} \frac{s_{E,\alpha} s_{E,\beta}}{S_E} \ell_{E,\alpha}.$$

Definimos, para cada elemento E , a matriz simétrica, σ_E , com elementos $\sigma_{E,\alpha\beta} = s_{E,\alpha} s_{E,\beta} S_E^{-1}$. Assim,

$$\sigma_E = \begin{bmatrix} \sigma_{E,RR} & \sigma_{E,RL} \\ \sigma_{E,LR} & \sigma_{E,LL} \end{bmatrix} = h_E^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Das observações anteriores e da relação de continuidade do fluxo, obteremos um sistema global que dependerá apenas dos multiplicadores de Lagrange:

$$a_E \sum_{\alpha} \left(\hat{A}_{E,\beta\alpha} - \sigma_{E,\beta\alpha} \right) \ell_{E,\alpha} + a_{\tilde{E}} \sum_{\alpha} \left(\hat{A}_{\tilde{E},\beta'\alpha} - \sigma_{\tilde{E},\beta'\alpha} \right) \ell_{\tilde{E},\alpha} = \frac{Q_E + Q_{\tilde{E}}}{2}.$$

Considere uma partição de $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$ com n subintervalos. Nesse caso, as incógnitas serão os multiplicadores de Lagrange: $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}$. Note que $\ell_n = 0$, devido à condição de Dirichlet. Para facilitar a apresentação da matriz vamos considerar as incógnitas enumeradas como segue: $L_i = \ell_{i-1}, 1 \leq i \leq n$. Para $n = 5$, a matriz global é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 h_1^{-1} & -a_1 h_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 h_1^{-1} & a_1 h_1^{-1} + a_2 h_2^{-1} & -a_2 h_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 h_2^{-1} & a_2 h_2^{-1} + a_3 h_3^{-1} & -a_3 h_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 h_3^{-1} & a_3 h_3^{-1} + a_4 h_4^{-1} & -a_4 h_4^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 h_4^{-1} & a_4 h_4^{-1} + a_5 h_5^{-1} \end{bmatrix}$$

e o vetor de termos independentes é dado por:

$$B^t = \left[\frac{1}{2} q_1 h_1 \quad \frac{1}{2} (q_1 h_1 + q_2 h_2) \quad \frac{1}{2} (q_2 h_2 + q_3 h_3) \quad 0.5 (q_3 h_3 + q_4 h_4) \quad \frac{1}{2} (q_4 h_4 + q_5 h_5) \right].$$

No caso geral, a matriz global é tridiagonal simétrica e definida positiva e tem elementos

$$a_{11} = A_1 = a_1 h_1^{-1}; \quad a_{ii} = A_i + A_{i-1}; \quad a_{i,i-1} = -A_{i-1}, \text{ onde } A_i = a_i h_i^{-1}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

e $a_{i,i+1} = -A_i, 1 \leq i \leq n - 1$. A demonstração é feita por indução finita e devemos mostrar que

$$v^t A v = \sum_{i=1}^{n-1} A_i (v_i - v_{i+1})^2 + A_n v_n^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $v^t = (v_1, v_2, \dots, v_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Note que $v^t A v \geq 0$, pois $A_i > 0 \forall i, 1 \leq i \leq n$. Como $v^t \neq 0$, então $v^t A v > 0$. De fato, $v^t A v = 0 \Rightarrow v_n = 0$ e $v_i = v_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1 \Rightarrow v_i = 0, \forall i, 1 \leq i \leq n$, o que seria uma contradição.

3 Aproximação da Equação de Convecção-Difusão

A velocidade do fluxo de concentração é dada por $\mathbb{V} = v + uc = -[\varphi d_m + |u| d_\ell] c_x + u c$. Em $E = [x_{inf}, x_{sup}]$, essa velocidade será aproximada por $\mathbb{V}_E(x) = v_{E,L} W_{E,L}(x) + v_{E,R} W_{E,R}(x) + c_E u_E(x)$. Com a notação do final da seção 1, consideraremos a seguinte aproximação: $|u_E(x)| \approx |u_{E,L} W_{E,L}(\bar{x}_E) + u_{E,R} W_{E,R}(\bar{x}_E)| = 0.5 |u_{E,R} - u_{E,L}| = |\bar{u}_E|$. A seguir, exibimos a formulação fraca para a velocidade \mathbb{V} , no elemento E .

$$\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} [v_{E,L} W_{E,L}(x) + v_{E,R} W_{E,R}(x)] W(x) dx = -\varphi_E d_{m,E} \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} c_x W(x) dx - d_{\ell,E} \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} |u_E(x)| c_x W(x) dx.$$

A integral do lado esquerdo da igualdade anterior será aproximada pela Regra do Trapézio. Na integral do lado direito, $|u_E(x)|$ será aproximado por $|\bar{u}_E|$. Seguindo o mesmo procedimento da formulação da velocidade de Darcy, seção 2, obteremos $v_{E,\beta} = 2a_E^{(c)}h_E^{-1}(c_E - \ell_{E,\beta}^{(c)})$, onde $a_E^{(c)} = \varphi_E d_{m,E} + d_{\ell,E}|\bar{u}_E|$. Nesta seção, denotaremos $\ell_{E,\beta}^{(c)}$ simplesmente por $\ell_{E,\beta}$. Quando consideramos um elemento vizinho ao elemento E , com respeito à extremidade β , uma expressão análoga para $v_{\tilde{E},\beta'}$ é obtida. Note que $\ell_{E,\beta} = \ell_{\tilde{E},\beta'} = \ell$. Assim, da relação de continuidade do fluxo (consulte a definição 2.2 e o parágrafo que a segue), obtemos

$$\ell = \frac{a_E^{(c)}c_E h_{\tilde{E}} + a_{\tilde{E}}^{(c)}c_{\tilde{E}} h_E}{a_E^{(c)}h_{\tilde{E}} + a_{\tilde{E}}^{(c)}h_E}. \tag{5}$$

Substituindo o valor de ℓ na expressão da componente ortogonal do fluxo, obtemos

$$v_{E,\beta} = \frac{2a_E^{(c)}a_{\tilde{E}}^{(c)}}{a_E^{(c)}h_{\tilde{E}} + a_{\tilde{E}}^{(c)}h_E}(c_E - c_{\tilde{E},\beta}) \equiv a_{E\tilde{E},\beta}(c_E - c_{\tilde{E},\beta}), \tag{6}$$

onde $c_{\tilde{E},\beta}$ é a concentração no elemento vizinho a E , com respeito à extremidade β .

A formulação fraca para a equação de convecção-difusão é dada por

$$\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} [\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \nabla(x)}{\partial x}] W dx = \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} \tilde{c} q W dx, \text{ com } W \text{ constante não nula.}$$

Portanto,
$$\varphi_E \frac{\partial c_E}{\partial t} h_E + [v_{E,L} + v_{E,R}] = (\tilde{c}_E - c_E) q_E h_E. \tag{7}$$

No poço de injeção (E_1), $\tilde{c}_E = 1$; no poço de produção (E_n), $\tilde{c}_E = c_E$. Nas aproximações envolvendo o tempo, o intervalo $J = [0, T]$ será decomposto em n_t subintervalos de comprimento $\Delta t = T n_t^{-1}$. Seja f uma função dependendo do tempo e definida em E , usaremos a notação: $f_E^{(i)} = f_E(t_i)$, onde $t_i = i\Delta t$. Dados os valores de $f_E^{(i-1)}$ e $f_E^{(i-2)}$, o valor de $f_E^{(i)}$ será calculado por extrapolação linear: $f_E^{(i)} = 2f_E^{(i-1)} - f_E^{(i-2)}$. Essa aproximação preservará a identidade relacionada à formulação fraca da equação elíptica. Ou seja, se a identidade vale nos tempos t_{i-1} e t_{i-2} , então, $u_{E,R}^{(i)} + u_{E,L}^{(i)} = q_E^{(i)} h_E$.

Aplicando o método de Adams-Moulton de ordem 2 na EDO anterior (7), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_E h_E c_E^{(i)} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{\beta} a_{E\tilde{E},\beta}^{(i)} (c_E^{(i)} - c_{\tilde{E},\beta}^{(i)}) + \frac{\Delta t}{2} (c_E^{(i)} - \tilde{c}_E^{(i)}) q_E^{(i)} h_E = \\ \varphi_E h_E c_E^{(i-1)} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{\beta} a_{E\tilde{E},\beta}^{(i-1)} (c_E^{(i-1)} - c_{\tilde{E},\beta}^{(i-1)}) - \frac{\Delta t}{2} (c_E^{(i-1)} - \tilde{c}_E^{(i-1)}) q_E^{(i-1)} h_E. \end{aligned} \tag{8}$$

Para atender às condições de fronteira, a equação anterior (8) deve ser reescrita adequadamente no poço de injeção ($q_E = Q > 0$), no poço de produção ($q_E = -Q$) e nos demais elementos, onde $q_E = 0$. Como exemplo, consideremos $n = 3$ e, para cada elemento $E = E_j$, $1 \leq j \leq n - 1$, $A_j = a_{E\tilde{E},R}^{(i)}$. O sistema nas incógnitas $c_E^{(i)}$ tem matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} h_1 \varphi_1 + 0.5 \Delta t (A_1 + h_1 q_1) & -0.5 \Delta t A_1 & 0 \\ -0.5 \Delta t A_1 & h_2 \varphi_2 + 0.5 \Delta t (A_1 + A_2) & -0.5 \Delta t A_2 \\ 0 & -0.5 \Delta t A_2 & h_3 \varphi_3 + 0.5 \Delta t A_2 \end{bmatrix}$$

e as coordenadas do vetor de termos independentes são dadas por:

$$\begin{aligned} RH_1 &= [h_1\varphi_1 - \frac{\Delta t}{2}(A_1^{(i-1)} + h_1q_1^{(i-1)})]c_1^{(i-1)} + \frac{\Delta t}{2}A_1^{(i-1)}c_2^{(i-1)} + \frac{\Delta t}{2}h_1[q_1^{(i-1)} + q_1^{(i)}]; \\ RH_j &= \frac{\Delta t}{2}A_{j-1}^{(i-1)}c_j^{(i-1)} + [h_j\varphi_j - \frac{\Delta t}{2}(A_{j-1}^{(i-1)} + A_j^{(i-1)})]c_j^{(i-1)} + \frac{\Delta t}{2}A_{j+1}^{(i-1)}c_{j+1}^{(i-1)}, 2 \leq j \leq n-1; \\ RH_n &= \frac{\Delta t}{2}A_{n-1}^{(i-1)}c_n^{(i-1)} + [h_n\varphi_n - \frac{\Delta t}{2}A_{n-1}^{(i-1)}]c_n^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar, por indução finita, que a matriz A é definida positiva. Para isto, basta mostrar que

$$v^t A v = \sum_{i=1}^n h_i\varphi_i v_i^2 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{n-1} A_i (v_i - v_{i+1})^2 + \frac{\Delta t}{2} h_1 q_1 v_1^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $v^t = (v_1, v_2, \dots, v_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

4 Conclusões

Cada discretização apresentada gerou um sistema linear com matriz simétrica e definida positiva. Na formulação fraca da equação elíptica, o sistema global ficou em função dos multiplicadores de Lagrange. Assim, resolvendo-se tal sistema, cada problema local (5 incógnitas) é resolvido como segue: em cada elemento finito, os dois multiplicadores de Lagrange são fornecidos pela solução do sistema global; a pressão é obtida da equação 4 e as duas componentes do fluxo de pressão são obtidas da equação 3. Na formulação fraca da equação de convecção-difusão, o sistema global ficou em função das concentrações. Assim, em cada elemento, a concentração é dada pela solução do sistema global; os dois multiplicadores de Lagrange são fornecidos pela equação 5 e as duas componentes do fluxo de concentração são obtidas da equação 6.

Agradecimentos

À FAPEMIG e ao CNPq, pelo auxílio financeiro para a participação no evento.

Referências

- [1] C. G. Almeida, J. Douglas, Jr. and F. Pereira, A new characteristics-based numerical method for miscible displacement in heterogeneous formations, *Computational and Applied Mathematics*, 21:573-605, 2002.
- [2] G. Chavent and J. E. Roberts, A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite element and standard finite difference approximations for the determination of velocities in waterflow problems, *Adv. Water Resources*, 14:329-348, 1991.
- [3] J. Douglas, Jr., F. Furtado and F. Pereira, On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs, *Computational Geosciences*, 2:155-190, 1997.