Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de Estabilidade para uma Formulação Semi-Discreta Híbrida Estabilizada Aplicada ao Problema do Calor

Daiana Soares Barreiro[1]
José Karam-Filho[2]
Coordenação de Mecânica Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ
Cristiane Oliveira de Faria[3]
Departamento de Análise Matemática, IME, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Neste trabalho, uma análise de estabilidade da solução semi-discreta do problema parabólico de difusão do calor é desenvolvida. O problema é discretizado no espaço usando um método de elementos finitos híbrido estabilizado. Resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias chamado de formulação semi-discreta. Este método, originalmente proposto para problemas elípticos, consiste no acoplamento de problemas locais resolvidos por métodos de Galerkin descontínuo (GD) para a variável primal, temperatura, com um problema global para o multiplicador de Lagrange, que é identificado com o traço da temperatura, impondo continuidade entre os elementos de forma fraca. Esta formulação híbrida possui as boas características dos métodos GD associados como estabilidade, robustez e flexibilidade, mas com complexidade e custo computacional reduzidos. Análise é feita para a formulação semi-discreta e foram obtidas condições de estabilidade independentes da discretização espacial.

Palavras-chave. Elementos Finitos, Métodos Híbridos, Análise Numérica, Equação do Calor

1 Introdução

A conexão entre os métodos híbridos e os métodos GD possibilita uma maior flexibilidade na construção de novos métodos de elementos finitos estáveis, precisos e localmente conservativos, bem como na implementação de algoritmos hp-adaptativos mais simples e computacionalmente eficientes. Os métodos de elementos finitos híbridos e os métodos GD têm em comum a utilização de aproximações em espaços quebrados onde as funções de interpolação no interior dos elementos são totalmente independentes e as condições de interface são impostas fracamente pela formulação variacional, através do multiplicador de Lagrange. Assim, um problema global apenas para o multiplicador de Lagrange é montado, utilizando interpolações contínuas ou descontínuas, e a solução da variável de interesse do problema é obtida localmente elemento a elemento.

[1]daianasb@lncc.br
[2]jkfi@lncc.br
[3]cofaria@ime.uerj.br

Esta conexão permite que a análise numérica dos métodos híbridos utilize os mesmos argumentos que são aplicados aos métodos GD [5], como foi feito em [2, 3].

Problemas de condução de calor em regime transiente são comumente representados por equações classificadas como parabólicas que têm sido muito estudadas sob os pontos de vista matemático e computacional. Neste trabalho será proposto um método híbrido estabilizado de elementos finitos, que é fundamentado no método de Galerkin descontínuo, para aproximações espaciais. Essa metodologia é denominada de aproximação semi–discreta ou aproximação contínua no tempo. Uma análise de estabilidade será apresentada.

2 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos os problemas modelo e algumas definições necessárias para a construção das formulações hibridizadas dos problemas elíptico e parabólico, mostrados a seguir, e que também serão utilizadas na análise de estabilidade.

2.1 Notações e Definições

Seja o espaço das funções mensuráveis quadrado integráveis,

$$L^2(\Omega) = \{v : \int_\Omega v^2 d\Omega < \infty\} \tag{1}$$

com sua norma usual definida pelo produto interno e representada por $\|\cdot\|$. A partição de elementos finitos é dada por $\mathcal{T}_h = \{\mathcal{K}\} := \{$ união de todos os elementos $\mathcal{K}\}$. Além disso, $\mathcal{E}_h$ é o conjunto de todas as arestas e dos elementos $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}_h^0$ é o conjunto das arestas interiores e $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h \cap \partial\Omega$ é o conjunto de arestas da fronteira de Ω. Sejam $[\![\cdot]\!]$ e $\{\cdot\}$ os operadores de salto e média, definidos como nos métodos GD [5]. Dados os elementos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{T}_h$ que compartilham o lado e, definimos $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ os vetores normais unitários na aresta e dos elementos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$, respectivamente. Para uma função escalar φ,

$$[\![\varphi]\!] = \varphi_1\mathbf{n}_1 + \varphi_2\mathbf{n}_2 \quad \text{em} \quad e \in \mathcal{E}_h^0 \quad \text{e} \quad [\![\varphi]\!] = \varphi\mathbf{n} \quad \text{em} \quad e \in \mathcal{E}_h^\partial, \tag{2}$$

$$\{\varphi\} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{em} \quad e \in \mathcal{E}_h^0 \quad \text{e} \quad \{\varphi\} = \varphi \quad \text{em} \quad e \in \mathcal{E}_h^\partial. \tag{3}$$

Denotaremos o espaço quebrado, [5], de dimensão finita (na variável espacial) para a temperatura, da seguinte maneira:

$$V_h = \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_\mathcal{K} \in S_\mathcal{K}(\mathcal{K}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}, \tag{4}$$

onde $S_k(\mathcal{K}) = P_k(\mathcal{K})$(espaço das funções polinomiais de grau igual ou maior do que k) ou $S_k(\mathcal{K}) = Q_k(\mathcal{K})$ (espaço das funções polinomiais de grau igual ou maior do que k em cada variável do espaço). Para o multiplicador de Lagrange, considerando funções de interpolação contínuas, o espaço será

$$M_h = \{\mu_h \in C^0(\mathcal{E}_h) : \mu_h|_e = p_l(e),\ \forall e \in \mathcal{E}_h^0,\ \mu_h|_e = 0,\ \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \tag{5}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0308

onde $p_l(e)$ é o espaço de funções polinomiais de grau igual ou maior do que l em cada aresta e. Aproximações descontínuas para o multiplicador com

$$M_h = \{\mu_h \in L^2(\mathcal{E}_h) : \mu_h|_e = p_l(e),\ \forall e \in \mathcal{E}_h^0,\ \mu_h|_e = 0,\ \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\} \tag{6}$$

também podem ser consideradas.

2.2 Problemas Modelos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio aberto, $\partial\Omega$ seu contorno, $f \in L^2(\Omega)$ um termo força e o tempo $t \in [0, T]$. Considerando condições de contorno de Dirichlet homogêneas, problemas de difusão de calor em regime transiente podem ser modelados pelo seguinte problema modelo parabólico linear: Determinar a temperatura $u = u(\mathbf{x}, t)$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \qquad \text{em} \quad \Omega \times [0, T] & (7)\\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times [0, T] & (8)\\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0 \qquad \text{em} \quad \Omega. & (9) \end{aligned}$$

Problemas estacionários de difusão de calor podem ser modelados pelo seguinte problema modelo elíptico: Determinar a temperatura u tal que,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{em} \quad \Omega & (10)\\ u &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega. & (11) \end{aligned}$$

3 Formulação Híbrida Estabilizada de Galerkin descontínuo para o problema Elíptico

Para o problema modelo elíptico, Arruda et al. [2] propuseram e analisaram uma formulação hibridizada estabilizada de Galerkin descontínuo onde o multiplicador de Lagrange é identificado como o traço da variável primal u: $\lambda = u|_e$ em cada aresta $e \in \mathcal{E}_h$. A condição de fronteira $u = 0$ em $\partial\Omega$ é fracamente imposta usando a mesma abordagem de Nitsche que é usualmente adotada em métodos GD. Nesta formulação um termo residual multiplicado por uma constante α foi adicionado, e se tomarmos: $\alpha = -1$, a formulação se torna simétrica e adjunta consistente; para $\alpha = 1$, temos uma formulação não simétrica e naturalmente coerciva; já se $\alpha = 0$, a formulação é chamada de incompleta. Também foi adicionado um termo para estabilização da variável u e do multiplicador de Lagrange λ.

A seguir, enunciaremos esta formulação, a definição das normas da energia usadas, bem como a equivalência entre elas e os lemas de continuidade e coercividade provados em [2] que serão utilizados, aqui, na análise do problema parabólico.

Método LDGC: Encontrar o par $[u_h, \lambda_h] \in V_h \times M_h$ tal que

$$A\left([u_h, \lambda_h], [v_h, \mu_h]\right) = F([v_h, \mu_h]), \quad \forall [v_h, \mu_h] \in V_h \times M_h, \tag{12}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0308

onde a forma bilinear $A(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear $F(\cdot)$ são definidos como

$$\begin{aligned} A\left([u_h,\lambda_h],[v_h,\mu_h]\right) =& \sum_{\mathcal{K}}(\nabla u_h,\nabla v_h)_{\mathcal{K}} + \int_{\mathcal{E}_h}(\alpha\{\nabla v_h\}\cdot[u_h] - \{\nabla u_h\}\cdot[v_h])ds \\ &+ \int_{\mathcal{E}_h^0}(\alpha[\nabla v_h](\{u_h\}-\lambda_h) - [\nabla u_h](\{v_h\}-\mu_h))ds \\ &+ \frac{\beta_0}{2h}\int_{\mathcal{E}_h}[v_h]\cdot[u_h]ds + \frac{2\beta_0}{h}\int_{\mathcal{E}_h}(\{u_h\}-\lambda_h)(\{v_h\}-\mu_h)ds \qquad (13) \\ F([v_h,\mu_h]) =& F(v_h) = \sum_{\mathcal{K}}(f,v_h)_{\mathcal{K}}, \qquad (14) \end{aligned}$$

e β_0 é um parâmetro de penalidade (constante positiva).

A estabilidade do método LDGC segue pela satisfação das condições do lema de Lax-Milgram (continuidade e coercividade) que dão limites superior e inferior ao operadores em questão. Para provar a estabilidade da forma bilinear $A(\cdot,\cdot)$, é usada a seguinte norma da energia definida no espaço produto $V_h \times M_h$ de dimensão finita:

$$\|[v,\mu]\|_E^2 = |v|_{1,h}^2 + |v|_*^2 + |\{v\}-\mu|_{\#}^2 \quad \forall [v,\mu]\in V_h\times M_h, \qquad (15)$$

onde $|v|_{1,\mathcal{K}}^2 := \int_{\mathcal{K}}|\nabla v|^2dx$, $\quad |v|_{1,h}^2 := \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_h}|v|_{1,\mathcal{K}}^2$, $\quad |v|_*^2 := \sum_{e\in\mathcal{E}_h}h^{-1}\int_e|[v]|^2ds$, $|\{v\}-\mu|_{\#}^2 := \sum_{e\in\mathcal{E}_h}h^{-1}\int_e|\{v\}-\mu|^2ds$. Assim, temos que

Lema 3.1. *(Coercividade). Para a forma bilinear $A(\cdot,\cdot)$, (13), existe uma constante $C_s>0$, tal que:*

$$A([v_h,\mu_h],[v_h,\mu_h]) \geq C_s\|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \qquad (16)$$

com $C_s = min\left\{1-2C(\xi_1+\xi_2),\ -2C(\xi_1+\xi_2)-\frac{C}{2\xi_1}+\frac{\beta_0}{2},\ -\frac{C}{2\xi_2}+2\beta_0\right\}$, onde ξ_1 e ξ_2 são constantes vindas da desigualdade de Young. C é a constante da desigualdade do traço [1].

Já a continuidade da forma bilinear $A(\cdot,\cdot)$ e do funcional linear $F(\cdot)$ é demonstrada no espaço produto de dimensão infinita $V(h)\times M(h)$, com $V(h) = V_h + H^2(\Omega)\subset H^2(\mathcal{T}_h)$ e $M(h) = M_h + L^2(\mathcal{E}_h^0)$ usando a norma tripla alternativa

$$|||[v,\mu]|||_E^2 := \|[v,\mu]\|_E^2 + \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_h}h^2|v|_{2,\mathcal{K}}^2, \quad \forall[v,\mu]\in V(h)\times M(h), \qquad (17)$$

onde $|v|_{2,\mathcal{K}}^2 := \int_{\mathcal{K}}|\Delta v|^2dx$. Restringindo para o espaço de dimensão finita $V_h\times M_h$, a equivalência entre as normas $\|\cdot\|_E$ e $|||\cdot|||_E$ é demonstrada em [2]. Com isso temos o seguinte resultado:

Lema 3.2. *(Continuidade). Sejam a forma bilinear $A(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear $F(\cdot)$ do problema elíptico definidos em (13)-(14). Então, $\forall[v_h,\mu_h] \in V_h \times M_h$ existem constantes $C_b > 0$ e $\gamma_b > 0$, tais que*

$$|A([u_h,\lambda_h],[v_h,\mu_h])| \leq C_b \|[u_h,\lambda_h]\|_E \ \ \|[v_h,\mu_h]\|_E \quad \text{e} \quad |F([v_h,\mu_h])| \leq \gamma_b \ \|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \quad (18)$$

com $C_b = max\{1,\ C,\ 2\beta_0\}$ e $\gamma_b = \tilde{C}\|f\|_0$, onde $\tilde{C}$ é a constante da desigualdade de Poincaré.

Essas condições garantem estabilidade do problema elíptico e serão usadas para a análise do problema parabólico semi-discreto feita a seguir.

4 Formulação Híbrida Estabilizada Semi-Discreta

Com base nas mesmas ideias encontradas em [2], para o problema elíptico, uma formulação híbrida estabilizada para a variável espacial combinada com um esquema de Euler implícito para a variável temporal foi proposta em [4] para o problema parabólico. Esta formulação evita as oscilações espúrias que surgem nos tempos iniciais de simulação quando, por exemplo, é usado o método de Galerkin usual para discretização espacial.

Então, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma análise numérica para essa formulação. Como primeiros resultados, aqui será apresentada a análise de estabilidade do caso semi-discreto que pode ser escrito da seguinte forma: Encontrar $u_h \in V_h$ e $\lambda_h \in M_h$, $\forall\ t \in (0,T]$, tal que

$$\sum_{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right)_{\mathcal{K}} + A([u_h,\lambda_h],[v_h,\mu_h]) \quad = \quad F(v_h) \qquad \forall\ \forall[v_h,\mu_h] \in V_h \times M_h. \quad (19)$$

$$\sum_{\mathcal{K}} (u_h(0) - u_0, v_h)_{\mathcal{K}} \quad = \quad 0 \qquad \text{em} \quad \Omega. \quad (20)$$

onde $A(\cdot,\cdot)$ e $F(\cdot)$ são a forma bilinear e o funcional linear, (13) e (14), já definidos para o problema elíptico.

No Lema a seguir demonstraremos a estabilidade para (19)-(20), obtendo limitações a priori da solução aproximada pelos dados do problema. Com este resultado obtemos o que é chamado de limites de estabilidade.

Lema 4.1. *Para o problema dado por (19)-(20), existe uma constante positiva $M = \max\{\dfrac{C^*}{C_s}, 1\}$, independente do parâmetro de malha h, tal que:*

$$\|v_h\|^2 + C_s \int_0^t \|[v_h,\mu_h]\|_E^2 dt \leq M \left(\int_0^t \|f\|^2 dt + \|v_h(0)\|^2 \right) \quad (21)$$

Demonstração. Tomando $u_h = v_h$ e $\lambda_h = \mu_h$ em (19) e usando a coercividade da forma bilinear $A(\cdot,\cdot)$, (16), temos que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_h\|^2 + C_s \|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \leq |F(v_h)|. \quad (22)$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0308

Aplicando a desigualdade de Cauchy- Schwarz no lado direito, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_h\|^2 + C_s\|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \leq \|f\|\|v_h\|. \tag{23}$$

Utilizando a desigualdade de Young temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_h\|^2 + C_s\|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \leq \frac{1}{2}\xi\|f\|^2 + \frac{1}{2\xi}\|v_h\|^2, \tag{24}$$

Da desigualdade de Poincaré para espaços quebrados ($\|v_h\|^2 \leq C^*\|\nabla v_h\|^2 \leq C^*\|[v_h,\mu_h]\|_E^2$), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_h\|^2 + C_s\|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \leq \frac{1}{2}\xi\|f\|^2 + \frac{1}{2\xi}C^*\|[v_h,\mu_h]\|_E^2. \tag{25}$$

Tomando $\xi = \dfrac{C^*}{C_s}$, chegamos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_h\|^2 + \frac{C_s}{2}\|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \leq \frac{C^*}{2C_s}\|f\|^2. \tag{26}$$

Multiplicando por 2 e integrando no intervalo $[0,t]$, temos:

$$\|v_h\|^2 + C_s\int_0^t \|[v_h,\mu_h]\|_E^2 \, dt \leq \frac{C^*}{C_s}\int_0^t \|f\|^2 \, dt + \|v_h(0)\|^2. \tag{27}$$

□

5 Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma análise de estabilidade para a solução aproximada obtida para o problema parabólico pela formulação semi-discreta híbrida estabilizada de Galerkin descontínua que justifica a eliminação de oscilações espúrias para os tempos iniciais, com a condição de estabilidade alcançada independente do parâmetro de malha, h.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à CAPES pelo apoio financeiro. Os demais autores agradecem o apoio da FAPERJ.

Referências

[1] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39:1749-1779, 2002. DOI: 10.1137/S0036142901384162.

[2] N.C.B. Arruda, A.F.D. Loula e R.C. Almeida. Locally discontinuous but globally continuous Galerkin methods for elliptic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 255:104-120, 2013. DOI:10.1016/j.cma.2012.11.013.

[3] C.O. Faria, A.F.D. Loula e A.J.B. dos Santos. Primal stabilized hybrid and DG finite element methods for the linear elasticity problem, *Computers & Mathematics with Applications*, 68:486-507, 2014. DOI:10.1016/j.camwa.2014.06.014.

[4] K.P. Fernandes, A.F.D.Loula e S.C.M. Malta. Uma formulação hibridizada de elementos finitos para problemas parabólicos, *TEMA*, 14:333-346, 2013. DOI: 10.5540/tema.2013.014.03.0333.

[5] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation.* SIAM Publication, New York, 2008.

