
Resolução de um problema elíptico não-linear pelo método de elementos finitos misto-híbrido

Margui A. Romero Pinedo¹

Maicon R. Correa²

Sônia M. Gomes³

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho é proposto um algoritmo numérico para um problema de valor de contorno elíptico não linear, de interesse na modelagem de escoamentos em meios porosos. A metodologia é baseada em formulações de elementos finitos mistas-híbridas, usando diferentes espaços de aproximação em malhas quadrilaterais. São exploradas as diferentes propriedades de tais espaços e suas consequências na precisão dos resultados.

Palavras-chave. Método de elementos finitos misto-híbrido, equação elíptica não linear, espaços $H(\text{div})$ -conformes, malhas quadrilaterais

1 Introdução

Escoamentos de fluidos compressíveis em meios porosos podem ser modelados por sistemas de equações diferenciais parciais, em geral de natureza parabólica, que representam fenômenos tais como a advecção, a difusão e a reação de fases e componentes que escoam [1]. Para este tipo de problema, uma abordagem apropriada é o método misto de elementos finitos, em que as variáveis são a pressão e o fluxo do fluido [2]. Em geral, a pressão é aproximada por funções escalares de $L^2(\Omega)$, definidas por partes, e o fluxo por funções vetoriais em sub-espaços de $H(\text{div}, \Omega)$, em que Ω é o domínio computacional. Existem diferentes escolhas de espaços de aproximação para as duas variáveis que sejam compatíveis, no sentido de gerar modelos numéricos estáveis. Como exemplo, citamos os clássicos espaços de Raviart-Thomas (RT) [3] e de Brezzi-Douglas-Marini (BDM) [4], ou os mais recentes espaços de Arnold-Boffi-Falk (ABF) [5].

Como analisado em [5], para problemas lineares e malhas quadrilaterais, a ordem de precisão da pressão, do fluxo e do seu divergente varia nos diferentes espaços de aproximação, podendo sofrer degradação se a malha for composta por elementos gerados por transformações não-afins, o que é o caso de quadriláteros gerais.

O objetivo do presente trabalho é apresentar um algoritmo iterativo baseado em formulações de elementos finitos mistas-híbridas para a solução de uma equação elíptica não

¹ra142302@ime.unicamp.br

²maicon@ime.unicamp.br

³soniag@ime.unicamp.br

linear e analisar o efeito do emprego de diferentes espaços de aproximação para malhas não-afins sobre a precisão dos resultados. Neste caso, a solução numérica envolve a resolução de um problema linear auxiliar em cada iteração. O uso da formulação mista-híbrida permite que as aproximações, tanto da pressão quanto do fluxo, sejam definidas por partes, sem requerimento de continuidade nas interfaces dos elementos, mas introduzindo uma variável adicional, o multiplicador de Lagrange, definido sobre os lados dos elementos. A função do multiplicador é forçar a continuidade das componentes normais do fluxo, propriedade fundamental neste tipo de aplicação. O sistema linear a ser resolvido em cada iteração é formulado só em termos do multiplicador de Lagrange [2].

O problema modelo e os conceitos gerais de formulações mistas e híbridas são apresentados na Seção 2, em que um algoritmo iterativo é proposto. Na Seção 3, são descritos os espaços RT, BDM e ABF em malhas quadrilaterais e suas propriedades de aproximação. Na Seção 4, são apresentados resultados de experimentos numéricos que ilustram as propriedades dos diferentes espaços de aproximação na solução do problema modelo não linear.

2 Problema modelo e formulações variacionais

Seja $\alpha(\mathbf{x}, p)$ uma função estritamente positiva e limitada, $f(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$, e o tensor $K(\mathbf{x}, p)$ definido positivo. Considera-se o seguinte problema modelo:

Problema modelo: *Encontrar a pressão p e o fluxo \mathbf{u} tais que*

$$\alpha p + \operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega, \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = -K \nabla p \quad \text{em } \Omega, \tag{2}$$

$$p = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{3}$$

Este sistema elíptico pode ser visto como o caso estacionário de um problema reativo-difusivo não linear ou como um passo de tempo do respectivo sistema parabólico [1].

Para a formulação mista de elementos finitos, consideram-se espaços de aproximação $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V} \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$, e $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q} \subset L^2(\Omega)$ de dimensão finita e compatíveis. Com base em tais espaços, a formulação variacional mista discreta do problema modelo é dada por [2]:

Formulação mista discreta *Encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$ e $p_h \in \mathcal{Q}_h$ tais que*

$$\begin{aligned} (K^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - (p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_h, q) + (\alpha p_h, q) &= (f, q) \quad \forall q \in \mathcal{Q}_h. \end{aligned}$$

No presente trabalho, as malhas $\mathcal{T}_h = \{E\}$ sobre Ω são formadas por elementos E quadrilaterais regulares, os quais são imagem de uma transformação geométrica F_E definida no elemento de referência $\hat{E} = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Se F_E for afim, os elementos E são paralelogramos, mas se for bilinear, \mathcal{T}_h pode incluir quadriláteros convexos mais gerais.

O espaço de aproximação da pressão é construído pelo mapeamento sobre E de funções polinomiais escalares \hat{Q} , definidas em \hat{E} . Os fluxos são mapeamentos de funções vetoriais polinomiais \hat{V} pela transformação de Piola P_{F_E} . Ou seja,

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V} : \mathbf{v}_h|_E \in P_{F_E} \hat{V}, \forall E \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_h = \{q_h \in \mathcal{Q} : q_h|_E \in \hat{Q} \circ F_E^{-1}, \forall E \in \mathcal{T}_h\}.$$

Observa-se que é preciso escolher apropriadamente as funções de forma em \hat{V} para garantir a continuidade da componente normal do fluxo nas interfaces dos elementos, uma característica dos espaços $H(\text{div}, \Omega)$ -conformes.

Uma alternativa para resolver o problema misto é usar uma formulação mista-híbrida, a qual consiste no uso de fluxos locais em $H(\text{div}, E)$, mas globalmente em $[L^2(\Omega)]^2$. A continuidade da componente normal dos fluxos entre elementos é imposta através da introdução de uma nova variável (multiplicador de Lagrange) que tem como domínio as arestas dos elementos [2]. Precisamente, definem-se os seguintes espaços:

$$\bar{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h|_E \in P_{FE} \hat{V}, \forall E \in \mathcal{T}_h\} \text{ e } \mathcal{L}_h = \{\mu_h \in L^2(\mathcal{E}_h^0) : \mu_h|_e \in P_k(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0\},$$

em que \mathcal{E}_h^0 é o conjunto de lados internos dos quadriláteros em \mathcal{T}_h , e $P_k(e)$ é o espaço polinomial restrito a e , com grau k correspondente ao da restrição da componente normal do fluxo na aresta. Sendo assim, a formulação variacional mista-híbrida consiste em:

Formulação Mista-Híbrida: *Encontrar $\mathbf{u}_h \in \bar{V}_h, p_h \in \mathcal{Q}_h, \lambda_h \in \mathcal{L}_h$ tais que*

$$\begin{aligned} (K^{-1}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - \sum_E \int_E p_h \text{div } \mathbf{v} d\Omega + \sum_E \int_{\partial E} \lambda_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \bar{V}_h, \\ (-\alpha p_h, q) - \sum_E \int_E \text{div } \mathbf{u}_h q d\Omega &= -(f, q) \quad \forall q \in \mathcal{Q}_h, \\ \sum_E \int_{\partial E} \mu_h \mathbf{u}_h \mathbf{n} d\Gamma &= 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{L}_h \end{aligned}$$

Apesar do aumento de graus de liberdade nos espaços vetoriais \bar{V}_h e do acréscimo da nova variável λ_h , a implementação da formulação mista-híbrida, no caso linear, pode ser feita pela resolução de um sistema condensado, envolvendo apenas o multiplicador λ_h .

A seguir, descreve-se um algoritmo iterativo para o problema não-linear na forma variacional mista-híbrida, o qual resolve, em cada iteração, um problema linear auxiliar obtido pela avaliação dos termos α e K na pressão calculada no passo anterior.

Algoritmo:

1. Dada uma aproximação inicial p^0 , inicialize o índice de iteração $l = 0$.
2. Dado p^l , encontre $(\mathbf{u}^{l+1}, p^{l+1}, \lambda^{l+1}) \in \bar{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{E}_h$ tal que

$$\begin{aligned} (K^{-1}(\mathbf{x}, p_h^l)\mathbf{u}_h^{l+1}, \mathbf{v}) - \sum_E \int_E p_h^{l+1} \text{div } \mathbf{v} d\Omega + \sum_E \int_{\partial E} \lambda_h^{l+1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \bar{V}_h, \\ (-\alpha(\mathbf{x}, p_h^l)p_h^{l+1}, q) - \sum_E \int_E \text{div } \mathbf{u}_h^{l+1} q d\Omega &= -(f, q) \quad \forall q \in \mathcal{Q}_h, \\ \sum_E \int_{\partial E} \mu_h \mathbf{u}_h^{l+1} \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{L}_h \end{aligned}$$

3. Cheque a convergência da solução. Caso tenha atingido a convergência, faça $p_h = p^{l+1}$, $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}^{l+1}$. Caso contrário, avance $l = l + 1$ e retorne ao passo 2.

3 Espaços de aproximação em malhas quadrilaterais

Dentre os espaços estáveis de elementos finitos em malhas quadrilaterais presentes na literatura, destacam-se aqui aqueles propostos por Raviart e Thomas [3], Brezzi, Douglas e Marini [4] e Arnold, Boffi e Falk [5]. No elemento de referência \hat{E} , definem-se como:

- **Espaços de Raviart-Thomas:** Para $k \geq 0$

$$\hat{V} := P_{k+1,k}(\hat{E}) \times P_{k,k+1}(\hat{E}), \quad \hat{Q} = Q_k(\hat{E}),$$

em que o símbolo $P_{r,s}$ é usado para denotar polinômios com grau máximo r e s na primeira e segunda variáveis espaciais, respectivamente, e $Q_k = P_{k,k}$.

- **Espaços de Brezzi-Douglas-Marini:** Para $k \geq 1$

$$\hat{V} = P_k(\hat{E})^2 \oplus \text{span}\{\text{curl}(\hat{x}_1^{k+1}\hat{x}_2), \text{curl}(\hat{x}_1\hat{x}_2^{k+1})\}, \quad \hat{Q} = P_{k-1}(\hat{E}),$$

em que P_k denota os polinômios de grau total menor ou igual a k .

- **Espaços de Arnold-Boffi-Falk:** Para $k \geq 0$

$$\hat{V} = P_{k+2,k}(\hat{E}) \times P_{k,k+2}(\hat{E}), \quad \hat{Q} = Q_{k+1}(\hat{E}) \setminus \text{span}\{\hat{x}_1^{k+1}\hat{x}_2^{k+1}\}.$$

Conforme verificado em [5], para problemas lineares, as famílias RT_k e ABF_k baseadas em malhas quadrilaterais gerais conduzem a aproximações do fluxo \mathbf{u} e da pressão p com taxas ótimas de ordem $k + 1$, mas somente os espaços ABF_k fornecem uma aproximação ótima de ordem $k + 1$ do divergente do fluxo, reduzindo-se a k no caso de espaços RT_k . Para BDM_k , as taxas de ordem $k + 1$ para o fluxo e k para a pressão e o divergente do fluxo somente são alcançadas em malhas retangulares. Caso contrário, ocorre degradação na convergência do fluxo e do seu divergente. Esses fatos são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1: Estimativas de erro no método misto em problemas lineares [5].

Espaços	$\ p - p_h\ _0$		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ _0$	
	retângulos	não-afim	retângulos	não-afim	retângulos	não-afim
RT_k	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	k
BDM_k	k	k	$k + 1$	$\lfloor (k + 1)/2 \rfloor$	k	$\lfloor k/2 \rfloor$
ABF_k	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$

4 Experimentos numéricos

Nesta seção, apresentam-se resultados de testes numéricos usando o algoritmo descrito na Seção 2 com os espaços RT_0 , ABF_0 , RT_1 , ABF_1 e BDM_1 . O problema modelo é definido

em $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, com $\alpha(\mathbf{x}, p) = 0.1e^{-p}$, $K(\mathbf{x}, p) = (1 + 5p^2)\mathbf{I}$, e $f(\mathbf{x})$ definido de forma que $p(\mathbf{x}) = \sin \pi x \sin \pi y$ seja solução exata. As malhas testadas são quadradas uniformes, com $n = 2^j$ sub-divisões dos eixos, com $j = 3, \dots, 6$, e malhas trapezoidais obtidas pela inclinação alternada dos lados horizontais das malhas quadradas, como ilustrado na Figura 1. A pressão inicial usada foi $p_0 = 1$ em cada malha, e o critério de parada do algoritmo avalia o erro relativo na norma L^2 da pressão e do fluxo entre as soluções obtidas numa iteração e na anterior, com uma tolerância de 10^{-8} .

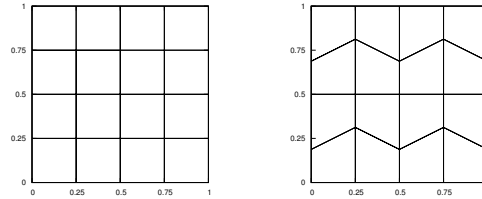


Figura 1: Exemplo de malhas retangulares (lado esquerdo) e trapezoidais (lado direito).

Tabela 2: Erros e taxas de convergência para RT_0 e ABF_0 .

n	Iter	$\ p - p_h\ $	ordem	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $	ordem	$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	ordem
RT_0 em malhas quadradas							
8	17	7,998e-02		6,868e-01		9,224e00	
16	16	4,006e-02	0,997	3,251e-01	1,079	4,716e00	0,968
32	16	2,004e-02	0,999	1,600e-01	1,023	2,371e00	0,992
64	16	1,002e-02	1,000	7,969e-02	1,006	1,187e00	0,998
ABF_0 em malhas quadradas							
8	17	9,306e-03		6,436e-01		1,847e00	
16	16	2,321e-03	2,003	3,193e-01	1,011	4,752e-01	1,959
32	16	5,802e-04	2,000	1,593e-01	1,003	1,197e-01	1,990
64	16	1,450e-04	2,000	7,959e-02	1,001	2,997e-02	1,997
RT_0 em malhas trapezoidais							
8	18	8,240e-02		7,603e-01		1,035e01	
16	16	4,128e-02	0,997	3,703e-01	1,038	6,553e00	0,660
32	16	2,065e-02	0,999	1,841e-01	1,008	5,085e00	0,366
64	16	1,033e-02	1,000	9,194e-02	1,002	4,639e00	0,132
ABF_0 em malhas trapezoidais							
8	17	1,409e-02		7,091e-01		2,838e00	
16	16	5,027e-03	1,487	3,556e-01	0,996	1,182e00	1,264
32	16	2,175e-03	1,209	1,780e-01	0,998	5,544e-01	1,092
64	16	1,039e-03	1,065	8,904e-02	0,999	2,723e-01	1,026

Os resultados são apresentados nas Tabelas 2 e 3, em que são indicados os erros na

norma L^2 da pressão, do fluxo e de seu divergente, bem como as taxas de convergência e o número de iterações para alcançar o critério de parada. Observa-se que para RT_0 e RT_1 as taxas ótimas de convergência do fluxo e da pressão, bem como a degradação da convergência do divergente, são mantidas como no caso linear. Para ABF_0 e ABF_1 , as taxas ótimas de ordem $k + 1$ previstas no caso linear ocorrem no problema não linear em malhas quadradas e trapezoidais. Verifica-se para este problema regular específico, que a pressão e o divergente obtidos com os espaços ABF_k em malhas quadradas convergem com taxa $k + 2$, acima da prevista pela estimativa de erro. No espaço BDM_1 , a precisão do fluxo no problema não linear é afetada se comparado com o caso linear. Por exemplo, em malhas quadradas, quando a taxa para o fluxo em problemas lineares é de ordem 2, obtém-se uma redução para ordem 1 no caso não linear. Cabe também observar que o algoritmo apresentou boas características de convergência, com pouca variação do número de iterações requeridas.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Projetos 306398/2012-5, 308632/2006-0, e 140366/2015-6).

Referências

- [1] Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Computational Science and Engineering. SIAM, 2006.
- [2] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] P. A. Raviart and J. M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Math. Aspects of the F.E.M.*, pages 292–315. Springer-Verlag, 1977.
- [4] F. Brezzi, J. Douglas Jr., and L. D. Marini. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, 47:217–235, 1985.
- [5] D. N. Arnold, D. Boffi, and R. S. Falk. Quadrilateral $h(\text{div})$ finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(6):2429–2451, 2005.

Tabela 3: Erros e taxas de convergência para RT_1 , BDM_1 e ABF_1 .

n	Iter.	$\ p - p_h\ $	ordem	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $	ordem	$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	ordem
RT_1 em malhas quadradas							
8	16	4,069e-03		6,048e-02		1,304e00	
16	16	1,015e-03	2,002	1,461e-02	2,049	3,310e-01	1,979
32	16	2,539e-04	2,014	3,620e-03	2,000	8,306e-02	1,995
64	16	6,349e-05	2,000	9,029e-04	2,003	2,078e-02	1,999
BDM_1 em malhas quadradas							
8	20	7,984e-02		4,667e-01		9,225e00	
16	17	4,004e-02	0,996	1,810e-01	1,367	4,716e00	0,968
32	17	2,004e-02	0,999	8,186e-02	1,145	2,372e00	0,992
64	16	1,002e-02	1,000	3,975e-02	1,042	1,187e00	0,998
ABF_1 em malhas quadradas							
8	16	1,704e-04		5,746e-02		1,313e-01	
16	16	1,806e-05	3,238	1,442e-02	1,995	1,640e-02	3,001
32	16	2,146e-06	3,073	3,608e-03	1,999	2,050e-03	3,001
64	16	2,646e-07	3,019	9,021e-04	2,000	2,562e-04	3,000
RT_1 em malhas trapezoidais							
8	17	4,751e-03		6,988e-02		1,691e00	
16	16	1,19e-003	2,002	1,681e-02	2,055	5,846e-01	1,533
32	16	2,964e-04	2,000	4,158e-03	2,016	2,469e-01	1,243
64	16	7,411e-05	2,000	1,036e-03	2,004	1,170e-01	1,077
BDM_1 em malhas trapezoidais							
8	21	8,226e-02		5,226e-01		1,035e01	
16	17	4,127e-02	1,303	2,118e-01	0,995	6,553e00	0,660
32	17	2,065e-02	1,111	9,806e-02	0,999	5,085e00	0,366
64	16	1,033e-02	1,032	4,797e-02	1,000	4,639e00	0,132
ABF_1 em malhas trapezoidais							
8	16	3,505e-04		6,507e-02		2,205e-01	
16	16	4,317e-05	3,022	1,634e-02	1,994	4,180e-02	2,399
32	16	6,112e-06	2,820	4,090e-03	1,998	9,409e-03	2,151
64	16	1,053e-06	2,537	1,023e-03	2,000	2,282e-03	2,044