Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simulação Numérica de um Sistema não linear do tipo Termoelástico

Bruno A. Carmo[1]
Mauro A. Rincon[2]
Programa de Pós-Graduação em Informática, IM-UFRJ

Resumo. Neste trabalho apresentamos a existência, unicidade e solução numérica de um sistema termoelástico com não linearidade local e global. A solução numérica é obtida via método dos elementos finitos na variável espacial e diferenças finitas na temporal. O sistema não linear resultante é resolvido via método de Newton. Experimentos numéricos, para o caso unidimensional, são apresentados em ordem de estimar a taxa de convergência da solução numérica.

Palavras-chave. Sistema termoelástico, Simulação numérica, Ordem de convergência, Método de Newton.

1 Introdução

Sejam u e θ, respectivamente, o deslocamento e temperatura, solução do sistema

$$\begin{cases} u''(x,t) - \alpha(t)\Delta u(x,t) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(x,t) + \lambda|u(x,t)|^{\rho}u(x,t) = 0, \\ \theta'(x,t) - \beta\Big(\displaystyle\int_{\Omega}\theta(x,t)dx\Big)\Delta\theta(x,t) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(x,t) + \gamma(\theta(x,t)) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

com $(x,t) \in \Omega\times]0,T[$ e condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0\times]0,T[, \quad \theta(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \eta(x)u'(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1\times]0,T[, \end{cases} \tag{2}$$

em que Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave Γ e $T > 0$ um número real arbitrário. Suponha $\Gamma = \overline{\Gamma_0 \bigcup \Gamma_1}$, satisfazendo $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \varnothing$. O vetor normal unitário exterior a Γ é dado por ν, $\mathbf{a}$ é um vetor constante do $\mathbb{R}^n$, λ e ρ são constantes reais positivas e α, β, γ e η são funções reais.

O sistema (1)-(2) modela pequenas vibrações verticais de uma membrana elástica acoplada com uma equação do calor e sujeita a condições de fronteira lineares mistas. O termo

[1] bruno.carmo@ppgi.ufrj.br
[2] rincon@dcc.ufrj.br

com a não linearidade não-local, $\beta\Big(\int_\Omega \theta(x,t)dx\Big)\Delta\theta(x,t)$, representa o fluxo de calor, ver em [1].

Modelos relacionados com este sistema de equações têm sido estudados por vários autores, entre eles podemos citar [2–4]. Em [2], as condições de fronteiras são análogas, porém o sistema é linear. Já em [3], além das mesmas não linearidades, o sistema é sujeito a uma condição de acústica não linear sobre parte da fronteira. Em ambos os trabalhos os autores investigaram a existência e unicidade das soluções e o comportamento assintótico da energia. Em [4], além da existência e unicidade, é apresentada a solução numérica para um modelo termoelástico linear com fronteira móvel.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método numérico baseado no método dos elementos finitos no espaço e método das diferenças finitas no tempo e verificar a eficiência do mesmo, analisando a ordem de convergência, a estimativa de erro, o decaimento assintótico e os gráficos comprovando os resultados teóricos conhecidos.

2 Resultados Analíticos

Com o objetivo de apresentar os resultados teóricos do sistema enunciamos a seguir o teorema de existência e unicidade de solução, cuja demonstração pode ser encontrada em [5]. Os resultados teóricos são fundamentais para o desenvolvimento do método numérico.

Considere as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \alpha \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}) \;\text{ com }\; \alpha' \in L^1(0,\infty)\cap L^\infty(0,\infty) \;\text{ e }\; \alpha(t)\geq \alpha_0>0;\\ \beta\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \;\text{ e }\; \beta(t)\geq\beta_0>0; \quad \gamma\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \;\text{ e }\; \gamma(0)=0;\\ 0<\rho<\infty \quad\text{se}\quad n=1\,,\; \dfrac{1}{2}\leq\rho<\infty \quad\text{se}\quad n=2 \quad\text{ou}\\ \dfrac{1}{n}\leq\rho\leq\dfrac{2}{n-2} \quad\text{se}\quad n\geq 3; \qquad \eta\in W^{1,\infty}(\Gamma_1) \;\text{ e }\; \eta(x)\geq\eta_0>0. \end{cases} \tag{3}$$

Definindo $V=\{v\in H^1(\Omega);\gamma_0(v)=0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$ e $H_\Delta(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega);\Delta v\in L^2(\Omega)\}$, o teorema de existência e unicidade é dado por:

Teorema 2.1. *Sob as hipóteses (3), $u_0\in V\cap H_\Delta(\Omega)$, $u_1\in V$, $\theta_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $\dfrac{\partial u_0}{\partial\nu}+\eta u_1=0$ em Γ_1, existe um único par de funções $\{u,\theta\}$, para $T>0$ arbitrário, solução de (1) - (2), satisfazendo*

$$\begin{aligned} &u\in L^\infty(0,T;V\cap H_\Delta(\Omega)),\;\; u'\in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)),\\ &u''\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)),\\ &\theta\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\;\; \theta'\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{4}$$

e as equações (1) e (2) são verificadas no seguinte sentido

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega [u''\phi + \alpha \nabla u \cdot \nabla \phi + \lambda |u|^\rho u \phi + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta\phi] dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \alpha\eta u'\phi dxdt = 0,\\ &\int_0^T \left[\int_\Omega \theta'\varphi dx + \beta\left(\int_\Omega \theta dx\right)\int_\Omega \nabla\theta\nabla\varphi dx + \int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'\varphi dx + \int_\Omega \gamma(\theta)\varphi dx\right] dt = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V)$ e $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

3 Solução Aproximada

A partir dos resultados teóricos vamos desenvolver um método para obter a solução numérica.

3.1 Método de Galerkin e sistema aproximado

Para cada m, sejam $V_m = [v_1, \ldots, v_m]$ e $W_m = [w_1, \ldots, w_m]$, onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base Hilbertiana de $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é base de autovetores do operador de Laplace em $H_0^1(\Omega)$. Desta forma, o problema aproximado consiste em determinar $u_m : [0,T[\to V_m$, $\theta_m : [0,T[\to W_m$, representados por $u_m(t) = \sum_{i=1}^m c_i(t)v_i$ e $\theta_m(t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)w_i$, tais que

$$\left\{\begin{array}{l}(u''_m, v) + \alpha(t)\left[(\nabla u_m, \nabla v) + (\eta(x)u'_m, v)_{\Gamma_1}\right] + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m, v) + \lambda(|u_m|^\rho_{\mathbb{R}}\, u_m, v) = 0,\\ (\theta'_m, w) + \beta\Big(\displaystyle\int_\Omega \theta_m dx\Big)(\nabla\theta_m, \nabla w) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m, w) + (\gamma(\theta_m), w) = 0,\end{array}\right. \tag{6}$$

$\forall v \in V_m$, $\forall w \in W_m$, com $u_m(0) = u_{0m}$, $u'_m(0) = u_{1m}$ e $\theta_m(0) = \theta_{0m}$. A existência das sequências $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ e $(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazendo a condição de compatibilidade $\dfrac{\partial u_{0m}}{\partial\nu} + \eta u_{1m} = 0$ sobre Γ_1 pode ser verifica seguindo as ideias contidas em [6].

Substituindo $(u_m(t), \theta_m(t))$ em (6) e considerando $v = v_j$, $w = w_j$ para $j = 1, \cdots, m$, obtemos

$$\left\{\begin{array}{l}Ac''(t) + \alpha(t)Kc(t) + \alpha(t)Ec'(t) + B^T d(t) + R(c(t)) = 0,\\ \overline{A}d'(t) + \beta\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^m d_k(t)\int_\Omega w_k dx\Big)\overline{K}d(t) + \overline{B}^T c'(t) + S(d(t)) = 0,\end{array}\right. \tag{7}$$

onde as matrizes são definidas por

$$\begin{aligned}&A_{i,j} = (v_i, v_j), \quad K_{i,j} = (\nabla v_i, \nabla v_j), \quad B_{i,j} = ((\mathbf{a}\cdot\nabla)w_i, v_j), \quad E_{i,j} = (\eta v_i, v_j)_{\Gamma_1},\\ &\overline{A}_{i,j} = (w_i, w_j), \ \overline{K}_{i,j} = (\nabla w_i, \nabla w_j), \ \overline{B}_{i,j} = ((\mathbf{a}\cdot\nabla)v_i, w_j),\\ &R_j(c(t)) = \lambda\left(\left|\sum_{k=1}^m c_k(t)v_k\right|^\rho_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^m c_i(t)v_i, v_j\right), \ S_j(d(t)) = \left(\gamma\left(\sum_{k=1}^m d_k(t)w_k\right), w_j\right).\end{aligned} \tag{8}$$

O sistema (7) é um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acoplado. Para o cálculo dos termos em (8), utilizamos o método dos elementos finitos considerando como base para os espaços V_m e W_m polinômios lineares por partes.

3.2 Método das diferenças finitas

Como a solução analítica do sistema não linear não é conhecida, vamos introduzir um método numérico utilizando diferenças finitas para obtermos uma solução discreta no tempo.

Seja $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$ uma discretização uniforme do intervalo de tempo $[0, T]$. Vamos desenvolver um método numérico baseado no θ-método para o sistema (7). Considere a primeira equação nos tempos t_{n+1} e t_{n-1} e a segunda equação nos tempos t_{n+1} e t_n. Calculando a média, obtemos

$$\begin{cases} A\dfrac{c''^{n+1}+c''^{n-1}}{2} + K\dfrac{\alpha^{n+1}c^{n+1}+\alpha^{n-1}c^{n-1}}{2} + E\dfrac{\alpha^{n+1}c'^{n+1}+\alpha^{n-1}c'^{n-1}}{2} + \\ \quad +B^T\dfrac{d^{n+1}+d^{n-1}}{2} + \dfrac{R(c^{n+1})+R(c^{n-1})}{2} = 0, \\ \overline{A}\dfrac{d'^{n+1}+d'^{n}}{2} + \overline{K}\dfrac{\beta(d^{n+1})d^{n+1}+\beta(d^{n})d^{n}}{2} + \overline{B}^T\dfrac{c'^{n+1}+c'^{n}}{2} + \dfrac{S(d^{n+1})+S(d^{n})}{2} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

onde $c^n = c(t_n)$ e $d^n = d(t_n)$. Esse procedimento permite uma ordem de convergência quadrática no tempo.

As matrizes do sistema (9) são de ordem $m \times m$. Logo, resolver o sistema acoplado resulta em um sistema não linear de ordem $2m \times 2m$.

Buscando diminuir o custo computacional, foram feitas aproximações de segunda ordem para os termos envolvendo as derivadas, ver [5], resultando no seguinte sistema desacoplado no tempo discreto $t = t_n$:

$$\begin{cases} \left(2A + (\Delta t)^2\alpha^{n+1}K + (\Delta t)\dfrac{3\alpha^{n+1}-\alpha^{n-1}}{2}E\right)c^{n+1} + (\Delta t)^2 R(c^{n+1}) + L_1^n = 0, \\ \left(2\overline{A} + (\Delta t)\beta(d^{n+1})\overline{K}\right)d^{n+1} + (\Delta t)S(d^{n+1}) + 2\overline{B}^T c^{n+1} + L_2^n = 0, \end{cases} \tag{10}$$

em que os vetores L_1^n e L_2^n são formados pelos termos que não dependem de c^{n+1} e d^{n+1}.

Sendo o sistema (10) não linear, determinamos as soluções (c^{n+1}, d^{n+1}), para $n = 1, 2, \cdots, N-1$, aplicado o Método de Newton. As soluções no tempo inicial, (c^1, d^1), são obtidas pelas condições iniciais.

3.3 Sistema não linear

Encontrar a solução do sistema (10) implica encontrar $X = c^{n+1}$ e $Y = d^{n+1}$ tais que $\mathcal{F}(X) = 0$ e $\mathcal{G}(Y) = 0$, onde

$$\mathcal{F}(X) = \left[2A + (\Delta t)^2\alpha^{n+1}K + (\Delta t)\frac{3\alpha^{n+1}-\alpha^{n-1}}{2}E\right]X + (\Delta t)^2 R(X) + L_1^n,$$

$$\mathcal{G}(Y) = \left[2\overline{A} + (\Delta t)\beta(Y)\overline{K}\right]Y + (\Delta t)S(Y) + 2\overline{B}^T X + L_2^n.$$

Para cada n fixo, seja $X_1 = C^n$ a primeira aproximação para a solução de $\mathcal{F}(X) = 0$. Daí, pela solução do sistema linear $J\mathcal{F}(X_j) \cdot s_j = -\mathcal{F}(X_j)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, encontramos uma sequência de soluções aproximadas, em que $X_{j+1} = s_j + X_j$ e $J\mathcal{F}(X_j)$ é a matriz Jacobiana de $\mathcal{F}$ calculada em X_j. O critério de parada utilizado foi o $max|X_{j+1} - X_j| < 10^{-12}$. Uma vez encontrado X, procedemos de forma análoga para encontrar a raiz de $\mathcal{G}(Y)$.

4 Simulação Numérica

Nesta seção apresentamos experimentos numéricos para verificar a eficiência do método numérico e comprovar os resultados teóricos. A implementação foi realizada no MatLab.

Nos testes realizados, o método se mostrou incondicionalmente estável. Contudo, para verificar a ordem de convergência, consideraremos discretizações idênticas para o espaço e tempo, denotadas por h_i. Para cada h_i, seja E_i o erro da solução aproximada na norma de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Desta forma, para $h_{i+1} = h_i/2$, a taxa de convergência é dada por $p = \ln(||E_i||/||E_{i+1}||)/\ln(2)$, veja [7].

Em nossos experimentos, consideramos o problema unidimensional com T=1, $\Omega =]0,1[$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\Gamma_1 = \{1\}$ e demais dados de entrada dados por:

$$\begin{aligned} &\alpha(t) = t+1,\ \mathbf{a} = 1,\ \lambda = 1,\ \beta(y) = y^2+1,\ \gamma(y) = y^2,\ \eta = 1, \\ &u(x,0) = \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}x),\ u'(x,0) = \frac{3\pi}{4\eta}\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}x),\ \theta(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x). \end{aligned} \tag{11}$$

Problema não homogêneo. Inicialmente, para validar a implementação, vamos comparar a solução numérica com a solução exata. Dado que a solução exata do problema não é conhecida, vamos considerar uma versão não homogênea de (1)-(2). Fazemos isto introduzindo funções suficientemente regulares $f(x,t)$ e $g(x,t)$ no lado direito das equações em (1). Neste caso, veja [7], escolhendo as forças f e g de forma conveniente, as soluções exatas são conhecidas e dadas por: $u(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}x)\exp(\frac{3\pi}{4\eta}t)$, $\theta(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x)\exp(\frac{3\pi}{4\eta}t)$.

Na Tabela 1 apresentamos os erros e taxas de convergências, em u^h e θ^h, quando o parâmetro ρ do termo não linear é igual a 0 e 3. Observe que $\rho = 0$ torna a primeira equação em (1) linear. Para $\rho = 1$ ou $\rho = 2$ os resultados foram similares ao caso $\rho = 3$. A Tabela 1 mostra que a ordem de convergência p da solução numérica é quadrática no tempo e espaço.

Tabela 1: Erro e taxa de convergência p do problema não homogêneo para dois valores de ρ.

	$-\log_{10}(Erro(u^h))$		$-\log_{10}(Erro(\theta^h))$		p_{u^h}		p_{θ^h}	
h_i	$\rho=0$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=3$
2^{-4}	1.4167	1.8091	1.7949	1.7931	–	–	–	–
2^{-5}	2.0215	2.4151	2.3980	2.3967	2.0088	2.0129	2.0035	2.0050
2^{-6}	2.6255	3.0120	3.0004	2.9979	2.0065	1.9828	2.0009	1.9971
2^{-7}	3.2287	3.6196	3.6025	3.5996	2.0037	2.0185	2.0002	1.9989

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0323

Problema homogêneo. Como a solução exata não é conhecida, consideramos como solução "exata" a solução aproximada obtida usando uma malha suficientemente fina. Nesse experimento foi utilizado $h_i = 2^{-9}$ que corresponde a 512 elementos. As soluções (u^h, θ^h), para $\rho = 3$, podem ser observadas em todos os passos de tempo na Figura 1.

Para considerar a ordem de grandeza dos erros foram considerados os erros relativos. Na Tabela 2 podemos observar que a ordem de convergência p obtida foi quase quadrática.

Tabela 2: Erro relativo e taxa de convergência p do problema homogêneo para dois valores de ρ.

	$Erro(u^h)$		$Erro(\theta^h)$		p_{u^h}		p_{θ^h}	
h_i	$\rho=0$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=3$
2^{-4}	0.0326	0.0400	0.7636	1.0035	–	–	–	–
2^{-5}	0.0091	0.0111	0.2343	0.2332	1.8456	1.8544	1.7046	2.1057
2^{-6}	0.0025	0.0030	0.0684	0.0795	1.8603	1.8913	1.7766	1.5529
2^{-7}	0.0006	0.0007	0.0163	0.0188	1.9636	1.9924	2.0719	2.0764

Decaimento assintótico da energia. A energia total associado com a formulação fraca de (1)-(2) é dada por $E(t) = \dfrac{1}{2}\left\{|u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla u(t)|^2 + \dfrac{2\lambda}{\rho+2}||u(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\right\}$. Resultados teóricos mostram que $E(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Calculando a energia no tempo discreto $t = t_n$, usando integração numérica, mostramos na Figura 2, com $h_i = 2^{-9}$, o decaimento da energia, representada pela logaritmo na base 10.

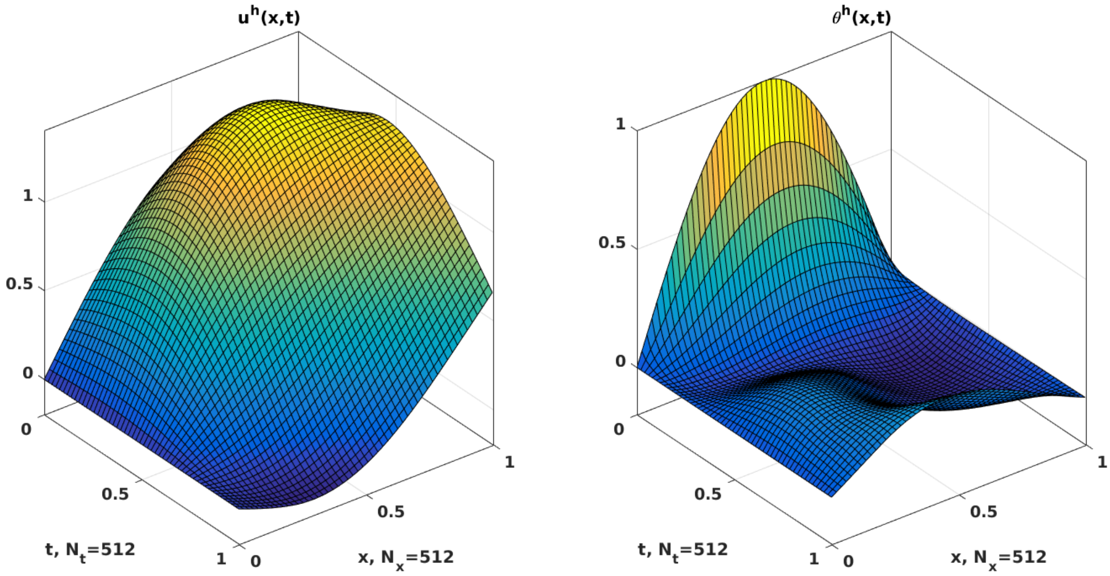

Figura 1: Solução numérica do problema homogêneo considerando $\rho = 3$.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0323

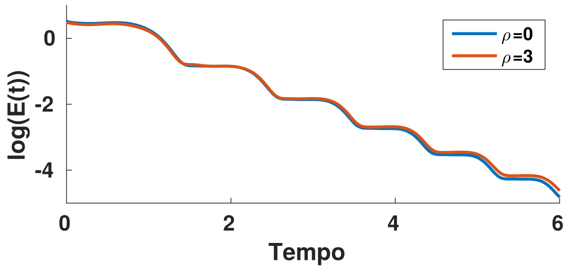

Figura 2: Decaimento da energia.

5 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos resultados teóricos e numéricos para um sistema de equações não lineares do tipo termoelástico. Analiticamente, condições para existência e unicidade foram estabelecidas no Teorema 2.1. Numericamente, um método numérico foi desenvolvido para a solução do modelo em estudo. Os exemplos numéricos apresentados indicam que a ordem de convergência é quadrática no espaço e no tempo e que a energia associada ao modelo decai assintoticamente. Os resultados numéricos para os casos $\rho = 1$ e $\rho = 2$ foram similares ao caso $\rho = 3$.

Referências

[1] M. Chipot and B. Lovat. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems. *Positivity*, 3:65–81, 1999. DOI: 10.1023/A:1009706118910.

[2] H.R. Clark, L.P. San Gil Jutuca, and M. M. Milla. On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1998:1–20, 1998. ISSN: 1072-6691.

[3] P. Braz e Silva, H. R. Clark, and C. L. Frota. On a nonlinear coupled system of thermoelastic type with acoustic boundary conditions. *Computational and Applied Mathematics*, pages 1–18, 2015. DOI: 10.1007/S40314-015-0236-1.

[4] M.A. Rincon, B.S. Santos, and J. Límaco. Numerical method, existence and uniqueness for thermoelasticity system with moving boundary. *Computational and Applied Mathematics*, 24:439–460, 2005. DOI: 10.1590/S0101-82052005000300007.

[5] B. A. Carmo. Análise e simulação numérica de um sistema dissipativo do tipo termoelástico. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 2015.

[6] L. A. Medeiros and M. M. Miranda. On a boundary value problem for wave equations: Existence, uniqueness-asymptotic behavior. *Revista de Matemáticas Aplicadas*, 17:47–73, 1996.

[7] M. A. Rincon and I-S. Liu. *Introdução ao método de elementos finitos*. IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

