

Solução numérica para um sistema fracionário usando o método de diferenças finitas não exato (NSFD)

Lislaine Cristina Cardoso¹

Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP

Rubens de Figueiredo Camargo²

Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP

Resumo Nesse trabalho é apresentado um método numérico para aproximar a solução de um sistema de ordem fracionária. Esse método numérico é dado por meio de aproximações envolvendo diferenças finitas. Como aplicação é apresentado o modelo de Brusselator de ordem não inteira.

Palavras-chave. Cálculo Fracionário, Diferenças Finitas, Grünwald-Letnikov.

1 Introdução

Durante as últimas décadas o cálculo fracionário tem se tornado uma importante ferramenta para descrever a dinâmica de sistemas complexos em diversas áreas do conhecimento.

A utilização de conceitos e técnicas do cálculo de ordem não inteira tem possibilitado importantes resultados em várias áreas do conhecimento, como controle e robótica, circuitos elétricos, biomatemática, química, biologia, processos estocásticos, entre outros [1, 2, 4, 14]. Além disso é uma ferramenta importante para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular aqueles que possuem dependência temporal [12].

Pelo fato de que nem todos os sistemas de equações diferenciais, de ordem inteira ou fracionária, apresentam solução na forma fechada, surge a necessidade de obter métodos numéricos para aproximar tais soluções. No âmbito de cálculo de ordem não inteira há poucos algoritmos desenvolvidos [5, 6]. O método mais utilizado para encontrar numericamente a solução de equações fracionárias é o método de Adam-Bashforth-Moulton (ABMM) [6].

Por outro lado, o método de diferenças finitas não exato (NSFD) foi introduzido por [7] para encontrar a solução numérica de equações diferenciais ordinárias e parciais, e atualmente tem sido estudado em diversos campos [9, 13]. Esse método consiste na diferenciação de uma função com um dado conjunto finito de valores da variável dependente em determinados pontos conhecidos da variável independente [7, 9, 11, 15].

¹lislaine@ibb.unesp.br

²rubens@fc.unesp.br

O objetivo deste trabalho é utilizar o método de aproximação por diferenças finitas para encontrar a solução de um sistema de ordem fracionária e está organizado como segue: na seção 1 uma breve introdução ao trabalho; na seção 2 os principais conceitos de cálculo fracionário; na seção 3 a discretização do método NSFD; na seção 4 uma aplicação para o método numérico; na seção 5 as simulações numéricas e na seção 6 as principais conclusões.

2 Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas definições e teoremas referentes à teoria de cálculo fracionário, além disso introduzimos alguns conceitos do método de discretização.

2.1 Cálculo Fracionário

A partir da generalização do conceito de fatorial, feito através da função gama, vamos introduzir a integral fracionária de Riemann-Liouville [1, 12].

Definição 2.1. *Sejam $f : R \rightarrow R$ uma função integrável e $n \in N$. Definimos as integrais de ordens um e n , denotadas, respectivamente, por I e I^n , como*

$$If(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1 \quad e \quad I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt_1.$$

Teorema 2.1. *Para $f : R \rightarrow R$ integrável temos [14]*

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n - 1)!} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

na qual o símbolo $*$ denota a convolução de Laplace e $\phi_n(t)$ a Gel'fand-Shilov ³.

Definição 2.2. *Seja $f(t)$ uma função integrável. Utilizamos a generalização do conceito de fatorial pela função gama para definir a integral de Riemann-Liouville de ordem α de $f(t)$, denotada por $I^\alpha f(t)$, como*

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Definição 2.3. *Sejam $f(t)$ uma função diferenciável, $m \in N$ e $\alpha \notin N$ tais que $m - 1 < Re(\alpha) < m$ ⁴. A derivada de ordem α no sentido de Caputo é definida como sendo a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes faça sentido ⁵, isto é,*

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) = \phi_{m-\alpha} * D^m f(t). \quad (3)$$

³Definida para $\nu \notin Z_-$, como $\phi_\nu(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$.

⁴Quando $\alpha = m$, temos a definição usual.

⁵Segue, como consequência da definição, que $D^\alpha t^\beta = t^{\beta-\alpha} \Gamma(\beta + 1) / \Gamma(\beta - \alpha + 1)$, que recupera o resultado clássico quando $\alpha = n$ e $\beta = m$, com $n, m \in N$.

Definição 2.4. O operador de Grünwald – Letnikov (GL) para derivadas fracionárias de uma dimensão é definido como

$$D_{GL}^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[k]} w_j^{(\alpha)} f(t - jh) \quad t \in [0, t_f], \quad (4)$$

em que $0 < \alpha < 1$, $[k]$ é a parte inteira de $k = \frac{t-a}{h}$, com a e t sendo os limites reais do operador D^{α} , o qual denota a derivada fracionária, h é o espaçamento e $w_j^{(\alpha)}$ é o coeficiente GL definido como

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \quad w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$w_0^{(\alpha-1)} = 1, \quad w_j^{(\alpha-1)} = \left(1 - \frac{\alpha}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha-1)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Lema 2.1. Sejam $0 < \alpha < 1$, $w_n^{(\alpha)}$ e $w_n^{(\alpha-1)}$ os coeficientes do operador GL. Então para $n = 1, 2, \dots$ tem-se: $-1 < w_n^{(\alpha)} < 0$ e $0 < w_n^{(\alpha-1)} < 1$.

3 Discretização NSFD

O método NSFD baseia-se no método de diferenças finitas exato [3]. Foi proposto por [8] e atualmente é utilizado em várias aplicações numéricas [7, 9–11].

Considere uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda) \quad (7)$$

em que λ é o vetor de parâmetros. O esquema NSFD é construído seguindo dois passos:

1. A derivada do lado esquerdo de (7) é substituída pela representação discreta na forma

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\phi(h, \lambda)} \quad (8)$$

em que y_n é uma aproximação de $y(t_n)$, $h > 0$ é o passo de tempo e $\phi(h, \lambda)$ é a função denominador [7, 10];

2. O termo não linear de (7) é dado pela representação discreta não local

$$F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda). \quad (9)$$

Com isso, podemos escrever a equação (7) como

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\phi(h, \lambda)} = F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda). \quad (10)$$

A derivada discreta do lado esquerdo da equação (10) é uma generalização da representação clássica discreta que é obtida usando $\phi(h, \lambda) = h$. A função denominador $\phi(h, \lambda)$ é uma função de h e deve satisfazer a condição de consistência [3]

$$\phi(h, \lambda) = h + O(h^p), \quad p > \alpha, \quad h \rightarrow 0 \tag{11}$$

em que $O(h^p)$ é o erro de truncamento. Na referência [10] é apresentada uma forma para determinar a função denominador $\phi(h, \lambda)$. Para mais informações veja [3, 7, 11].

3.1 NSFD para uma equação de ordem não inteira

Uma equação de ordem fracionária pode ser discretizada de forma análoga ao apresentado anteriormente. Entretanto, devem ser levadas em consideração algumas peculiaridades dos sistemas de ordem fracionária ⁶.

Considere o sistema de ordem fracionária, em que $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{12}$$

Através do operador GL (4) e do processo descrito na seção anterior, o sistema (12) pode ser discretizado como segue:

$$\frac{1}{\phi(h, \lambda)} \sum_{j=0}^n w_j^\alpha (x_{n-j} - y_0) = F(t_n, x_n, x_{n-1}, \dots, \lambda), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{13}$$

A condição de consistência (11) não garante a convergência da representação discreta para derivadas fracionárias em (13) [11]. Assim a condição de consistência ⁷ será [11]

$$\phi(h, \lambda) = h^\alpha + O(h^p), \quad p > \alpha. \tag{14}$$

4 Aplicação

Nesta seção aplicamos o método NSFD ⁸ para encontrar a solução aproximada do sistema de Brusselator de ordem fracionária [11, 15].

O modelo de Brusselator, que foi proposto por Prigogine e Lefever em 1968, é um sistema de equações diferenciais não lineares, utilizado em reações químicas autocatalíticas. Esse modelo apresenta oscilações que não dependem da quantidade de reagente presente inicialmente. Sua versão fracionária é dada por

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = a - (\mu + 1)x(t) + x(t)^2 y(t) \\ D^\alpha y(t) = \mu x(t) - x(t)^2 y(t) \end{cases} \tag{15}$$

⁶Devido a natureza não local do operador de ordem fracionária, a representação discreta das derivadas deve levar em conta a solução no tempo anterior.

⁷Neste trabalho utilizamos $\phi(h, \mu + 1) = \frac{1 - e^{-h^\alpha(\mu+1)}}{\mu+1}$. Outras funções que satisfazem a condição de consistência (14) podem ser vistas em [10, 11].

⁸O método foi implementado em linguagem C.

em que $x(t)$ e $y(t)$ representam, respectivamente, o ativador e o inibidor e a e μ são parâmetros externos.

Considere x_n e y_n aproximações para $x(t_n)$ e $y(t_n)$. Então substituindo o termo não linear do lado direito de (15) por

$$x(t) \rightarrow x(t_{n-1}), \quad x^2(t)y(t) \rightarrow x(t_n)x(t_{n-1})y(t_{n-1})$$

e aplicando o operador GL (4) no sistema (15), obtemos

$$\begin{cases} x_n + \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)} x_{n-j} - w_n^{(\alpha-1)} x_0 &= \phi(h)[a - (\mu + 1)x_{n-1} + x_n x_{n-1} y_{n-1}], \\ y_n + \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)} y_{n-j} - w_n^{(\alpha-1)} y_0 &= \phi(h)[\mu x_{n-1} - x_n x_{n-1} y_{n-1}]. \end{cases} \quad (16)$$

Isolando x_n e y_n , temos

$$\begin{cases} x_n &= \frac{w_n^{(\alpha-1)} x_0 - \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)} x_{n-j} + \phi(h)[a - (\mu + 1)x_{n-1}]}{1 - \phi(h)x_{n-1}y_{n-1}} \\ y_n &= w_n^{(\alpha-1)} y_0 - \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)} y_{n-j} + \phi(h)[\mu x_{n-1} - x_n x_{n-1} y_{n-1}] \end{cases} \quad (17)$$

que é o sistema de ordem fracionária discretizado.

5 Resultados

Para realizar as simulações utilizamos o método NSFD para aproximar a solução do modelo (17). Os parâmetros utilizados foram $a = 1, \mu = 3, \alpha = (1; 0, 7), h = 0, 05, t = 4000$ e $(x_0, y_0) = (1, 1; 2, 9)$.

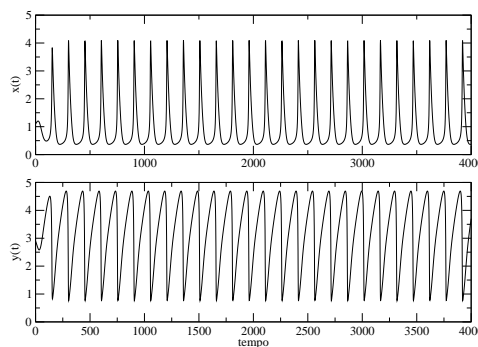


Figura 1: Dinâmica para $\alpha = 1$.

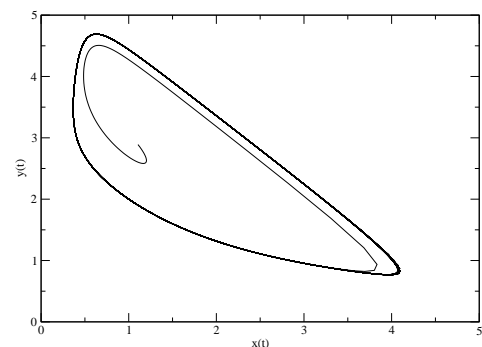


Figura 2: Retrato de fase.

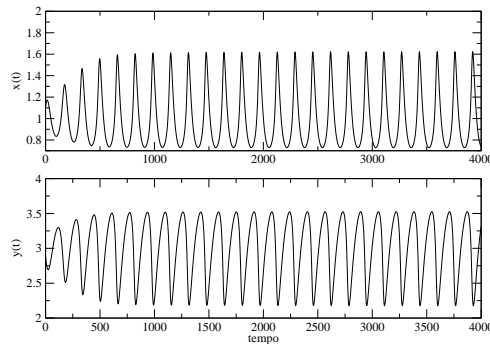


Figura 3: Dinâmica para $\alpha = 0,7$.

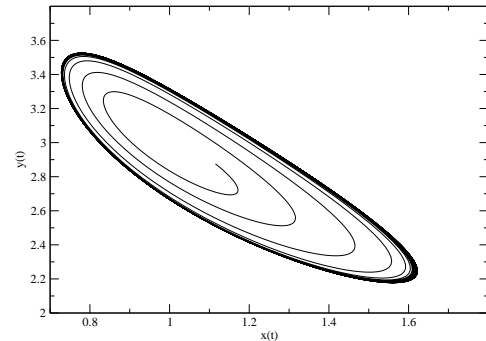


Figura 4: Retrato de fase.

Podemos observar que tanto para o caso fracionário, quando $\alpha = 0,7$, quanto para o caso clássico, $\alpha = 1$, a solução apresenta comportamento oscilatório instável. Isso pode ser observado nas Figuras 1 e 3.

A partir do retrato de fase apresentado nas Figuras 2 e 4, vemos que as trajetórias convergem para um ciclo limite. Esses resultados obtidos através da simulação numérica comprovam os resultados teóricos obtidos em [11], através do estudo da análise de estabilidade.

6 Conclusões

Através deste trabalho concluímos que o método NSFD se mostrou satisfatório para encontrar uma aproximação da solução para o modelo proposto. Como trabalho futuro aplicaremos esse método para encontrar a solução de sistema de ordem fracionária para a hepatite B com retardo na ação de droga, bem como comparar tal solução com outros métodos a fim de encontrar aquele que mais se aproxima da solução real.

Agradecimentos

LCC agradece a CAPES e ao programa de Pós Graduação em Biometria pelo suporte financeiro e RFC agradece ao CNPq (Projeto Universal - Processo:455920/2014 – 1).

Referências

- [1] R. F. Camargo and E. C. de Oliveira, “Cálculo Fracionário”, Editora Livraria da Física, São Paulo, Brasil, 2015.

- [2] R. F. Camargo, E. C. de Oliveira and J. Vaz Jr, On the generalized Mittag-Leffler function and its application in a fractional telegraph equation, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 14: 1385-0172, 2011.
- [3] J. A. Cuminato and M. M. Junior, “Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas”, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [4] L. Debnath, Recent applications of fractional calculus to science and engineering, *International Journal of Mathematics*, 03: 3413-3442, 2003.
- [5] E. Demirci and N. Ozalp, A method for solving differential equations of fractional order, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(11): 2754-2762, 2012.
- [6] K. Diethelm, N. Ford, A. Freed and A. Luchko, Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(6): 743-773, 2005.
- [7] R. Mickens and A. Smith, Finite-difference models of ordinary differential equations: influence of denominator functions, *Journal Franklin Institute*, 327(2): 143-149, 1990.
- [8] R. Mickens, *Advanced in the applications of nonstandard finite difference schemes*, Wiley-Interscience, Singapore, 2005.
- [9] K. Moaddy, I. Hashim and S. Momani, Non-standard finite difference schemes for solving fractional-order *Rössler* chaotic and hyperchaotic systems, *Computers and Mathematics Applied*, 62(1): 1068-1074, 2011.
- [10] S. Zibaei and M. Namjoo, A nonstandard finite difference scheme for solving fractional order of HIV-1 infection of $CD4^+$ T-cells, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 6(2): 169-184, 2015.
- [11] M. Y. Ongun, D. Arslan and R. Garrappa, Nonstandard finite difference schemes for a fractional order Brusselator system, *Advances in Difference equations*, 2013(102): 1-13, 2013.
- [12] I. Poldlubny, *Fractional Differential Equation. Mathematics in Science and Engineering*, 198, Academic Press, San Diego, 1999.
- [13] L. Roeger, Nonstandard finite-difference schemes for the Lotka-Volterra systems: generalization of Mickens’s method, *Journal Differential Equation Applied*, 12(9): 937-948, 2006.
- [14] N. Varalta, A. V. Gomes and R. F. Camargo, A prelude to the fractional calculus applied to tumor dynamic, *Tema*, 2014, DOI: 10.5540/tema.2014.015.02.0211.
- [15] Y. Wang and C. Li, Does the fractional Brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle?, *Physics Letters A*, 372(29): 414-419, 2007.